DIE PARTIELLEN

DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

DER

MATHEMATISCHEN PHYSIK

St. Schappe

DIE PARTIELLEN

DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

DER

MATHEMATISCHEN PHYSIK

NACH RIEMANN'S VORLESUNGEN

IN VIERTER AUFLAGE

NEU BEARBEITET

VON

HEINRICH WEBER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

ERSTER BAND

MIT EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1900

VORREDE.

Es ist jetzt ungefähr zwei Jahre her, sei
buchhandlung von Friedr. Vieweg u. Soh
machte, die Vorlesungen von Riemann über pa
gleichungen, die seit Riemann's Tode in drei m
schiedenen Auflagen, zuletzt im Jahre 1882, von
veröffentlicht waren, aufs Neue herauszugeben.
Vorschlag zwar nicht ohne Bedenken, aber
guten Muthes eingegangen, um so mehr, als
seit Jahren den Gedanken bei mir erwogen hal
auf dem Gebiete der partiellen Differentialglei
Zusammenhang darzustellen und zu veröffentli
Riemann sagt in der Einleitung, die in

zeiten und Abstände, welche al
lich sind (mit der Erfahrung ve
leiten."

Die erste der beiden hier v
gaben ist die Aufstellung der
auf physikalische Thatsachen u
ist die Integration dieser Differ
wendung auf den einzelnen conc
der Mathematik.

Riemann führt nun aus, w
Galilei und Newton gelegt hal
entwickelt haben, wie die Ansch
schiedenen Zweigen der mathem
der Gesetze durch Differential
wie die Wissenschaft noch zu de
Standpunkt Newton's stehe.

„Es ist seit Newton ke
schreibt er; „alle Versuche, übe
Innere der Natur zu dringen, sin
fluss der späteren philosophisch
physikalischen Literatur gelten
gehabt, die ursprüngliche Auffas
und Inconsequenzen in dieselbe

Dass Riemann selbst an
erkenntniss über die Newton

Seit jener Zeit ist fast ein halbes Jahrhun
und die Sachlage ist eine andere geworden.

Von England her, von wo uns vor zweihun
Lehre von der allgemeinen Gravitation gekommen
Anschauung Bahn gebrochen, die, wenigstens
nungen der Elektricität, des Magnetismus und de
jenem Riemann'schen Ideale nahe kommt, we
in Bezug auf die Gravitation bis jetzt noch im
ist die auf Faraday's Anschauungen fussende
ausgebaute, und jetzt fast allgemein angenomm
Elektromagnetismus und des Lichtes, durch d
nungen nicht mehr aus einer unvermittelten Fe
dern aus einem Spannungszustande des umgeben
geleitet werden. Hand in Hand mit der Ent
Theorie, die grosse Erscheinungsgebiete auch
befriedigender Weise erklärt, ist die Erkenntn
sachen und Erscheinungen gegangen, die sie au
bestätigt haben, und die der mathematischen T
neuer Aufgaben stellt. Wir brauchen nur an
von H. Hertz zu erinnern, die eine so augen
stimmung in den Gesetzen der Fortpflanzung
kung mit der Optik ergeben haben. Alles in
es hier mit einer Anschauung zu thun, die
freuen geeignet ist, der in den physikalischen
sucht, als blosse Darstellung oder Beschreibu

Auch die mathematischen Hülfsmit
der partiellen Differentialgleichungen hal
zehnten manchen Zuwachs erhalten, unte
hauptsächlich auf Riemann's Einfluss
gedehnte Anwendung der functionentheore
heben möchte.

Wenn sich hiernach der Inhalt der
in den vierzig Jahren, seit Riemann dies
Mal gehalten hat, so bedeutend verände
Frage, dass ein unveränderter oder w
jener Vorlesungen gar nicht mehr zeitgem
das Buch mehr als bloss historischen We
es seiner Zeit gewesen ist, ein Handbu
Physiker in leicht verständlicher Form di
Hülfsmittel bietet. Es musste also an
bearbeitung gegangen werden. Dabei ers
gemessen, die Beschränkung aufzugeben,
einer Universitätsvorlesung vorschrieb. In
Ausgaben findet sich nichts über Elektr
Der physikalische Stoff beschränkt sich a
cität und Hydrodynamik. Dies war um
als Riemann die Schwere, die Elektric
mus in einer anderen Vorlesung behan
von Hattendorff für den Druck bearbe
So entstand denn der Plan, um ein

denen die behandelten Probleme entnommen si
machen. Der Schwerpunkt liegt in der mathema
lung der einzelnen Probleme. Es ist bei der
selbstverständlich, dass bei diesen Problemen n
schränkte Auswahl getroffen werden konnte, w
physikalischen besonders auch auf das mathem
Gewicht gelegt ist. Umständliche Entwickelung
rungsrechnungen, so sehr sie auch dem Physiker
besserer und strenger Methoden nothwendig sei
sie ohne besonderes mathematisches Interesse si
mieden.

Ebenso aber sind Fragen von nur mathema
die dem Physiker allzu abstract erscheinen mö
schwierigen tiefer gehenden Untersuchungen ü
der Lösungen, nicht in den Kreis der Betrachtu

Es entstand nun aber die Frage, ob es
den ich hier dargelegt habe, dessen Durchführ
greifende Umarbeitung in allen Theilen nöthi
gerechtfertigt sei, das Werk als Vorlesung Ri
zeichnen.

Ich bin mir wohl bewusst, dass ich in de
Verantwortung allein trage. Da aber nicht nu
Ganzen in Riemann's Weise beibehalten ist, s
so viel in meinen Kräften stand, bemüht gewese
in Riemann's Sinn und Geist fortzuführen,

INHALTSVERZEICHNISS DES ERST

Erstes Buch.

Analytische Hülfsmitt

Erster Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

Vierter Abschn

Fourier'sche Re

Fünfter Abschn

Mehrfache Integ

Inhaltsverzeichniss des ersten B

Achter Abschnitt.

Bessel'sche Functionen.

Zehnter Abs

Vector

Elfter Abs

Potenti

Zwölfter Abs

Beispiele zum

Inhaltsverzeichniss des ersten Ban

Vierzehnter Abschnitt.

Ueberblick über die Grundsätze der

Drittes Buch.

Elektricität und Magnetism

Fünfzehnter Abschnitt.

Elektrostatik.

Siebenzehnter

Magnetis

Achtzehnter A

Elektroki

Neunzehnter A

Elektrolytisch

Zwanzigster A

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Strömung der Elektricität im Rau

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Elektrolytische Verschiebungen

Berichtigun

Seite 185, Zeile 10 von unten lies „$x^{-\frac{5}{2}}$“

Seite 192, Formel (13) soll heissen $A_0 =$

Seite 219, Zeile 6 und 8 von unten lies „
Seite 219, Zeile 1 von unten, Formel (5),
Seite 295, Zeile 15 von unten lies „der“ s
Seite 404, Formel (6) lies $+ R \operatorname{grad} \log \alpha$
Seite 408, Formel (11) und (14) lies $\pm$ st
Seite 414, Zeile 9 von oben, Formel (1) s
$- \operatorname{div} \lambda \varphi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div}$
Seite 414, Formel (2) lies $\mathfrak{S} = \lambda \operatorname{grad} \varphi$ s

ERSTES BUCH.

ANALYTISCHE HÜLFSMITT

Erster Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§. 1.

Obere und untere Grenze.

Es bedeute $\mathfrak{A}$ irgend eine Menge reeller Zahl

$$\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

in endlicher oder unendlicher Anzahl, jedoch α zwischen zwei endlichen Zahlwerthen eingeschlo

Wir stellen dann den Satz an die Spitze die Menge $\mathfrak{A}$ eine obere und eine untere (

Es sind darunter zwei Zahlen A, B zu verstel die kleinere A nicht grösser, die grössere B nic irgend eine der Zahlen $\mathfrak{A}$ ist, während, wenn ω kleine positive Zahl ist, sowohl zwischen A un auch zwischen B und $B - \omega$ (mit Einschluss d und B) noch Zahlen aus $\mathfrak{A}$ enthalten sind.

Schwankung in einem noch so klein
Intervalle grösser als eine endlich
auch das Umgekehrte bewiesen, n
einzelnen Punkte eines Intervalles s
Intervalle stetig ist.

§. 3.

Bestimmte In

Es sei $y = f(x)$ eine in dem

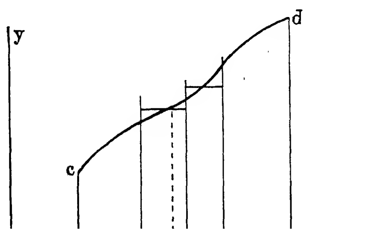
(1) $$\varDelta = (a,$$

stetige Function einer Variablen
wir nun in Theilintervalle δ, die alle
liegen, so dass

(2) $$\varDelta = \Sigma$$

ist. Eines dieser Theilintervalle δ
Endpunkte α, β bezeichnet. Ist ξ d

Fig. 1.



Der Beweis hierfür ergiebt sich aus folgenden B
Sind A, B die untere und obere Grenze von $f($
valle Δ, so folgt aus (2) und (3)

$$A\Delta < S < B\Delta,$$

und mithin, wenn Ξ einen in dem Intervalle Δ gele
von x bedeutet, der der Bedingung

$$A < f(\Xi) < B$$

genügt:

(4) $$S = \Delta f(\Xi).$$

Es hat also S jedenfalls einen endlichen Wert
Sind ferner g, h die untere und obere Grenze
dem Intervalle δ, so ist

(5) $$\Sigma g\delta < S < \Sigma h\delta.$$

Wenn also

$$D = h - g$$

die Schwankung der Function im Intervalle δ ist,
Schwankungen der Summe S bei festgehaltenen δ
als $\Sigma D\delta$, und wenn G die obere Grenze von
grösser als $G\Delta$, und sind also wegen der vorausges
keit von $f(x)$ bei unendlich abnehmendem d unend

Wenn wir aber das Intervall δ in kleinere Inte
theilen und mit ξ' einen in δ' gelegenen Werth von
so ist, wenn wir die Formel (4) auf das Intervall δ

$$\Sigma\delta' f(\xi') = \delta f(\xi),$$

wo ξ in δ liegt, und mithin ist die dieser weite
Eintheilung entsprechende Summe

Es ist nun leicht zu sehen, dass d
gleich den Inhalt F der von der Cur
der Abscissenaxe begrenzten Fläche a
für jedes Theilstück die Parallele mit
höchsten Punkt der Curve, so wird S
den tiefsten Punkt, so wird $S < F$.
werth von S mit F zusammen.

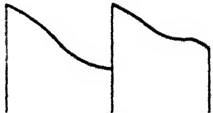
§. 4.

Erweiterung des Integ

Die Stetigkeit der Function $f(x)$
wir bisher vorausgesetzt haben, ist fü
des bestimmten Integrals nicht noth
und hinreichenden Voraussetzungen, d
die Function $f(x)$ gemacht werden m
festgestellt [1]). Wir führen hier nu
Integralbegriffes auf, die für die
keit sind.

1. Wenn die Function $f(x)$ nicht
sie so beschaffen sein, dass jedes en

Fig. 2.



Function f
liche Anza
fällt, in d
stetig ist,
der Annähe

sammenstossenden Werthe von $f(x)$ werden (nac
Dirichlet eingeführten Bezeichnung) mit

$$f(c-0) \quad \text{und} \quad f(c+0)$$

bezeichnet[1]). Für solche Fälle wird das bestimmte
Function $f(x)$ einfach durch die Formel erklärt:

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

und diese Formel gilt natürlich auch, wenn c kein U
punkt ist.

Wenn wir nach dieser Festsetzung ein Integ
änderlicher oberer Grenze x betrachten:

$$(2) \qquad F(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad a \leqq x \leqq b,$$

so ist $F(x)$ selbst dann eine stetige Function von
nicht stetig ist. Denn ist $\delta = (\alpha, \beta)$ irgend ein I
so ist die Schwankung von $F(x)$ in diesem Intervalle
die der Function

$$F(x) - F(\alpha) = \int_\alpha^x f(x)\,dx \qquad \alpha \leqq x \leqq$$

und diese Differenz, und also auch ihre Schwankun
kleiner als $g\,\delta$, wenn g grösser ist als der absolut g
von $f(x)$ im Intervalle δ. Das Product $g\,\delta$ wird

$$(3) \qquad F(x) = \int_x^b f(x)\, d$$

so lange $x > a$ ist, eine wohl definirte

Es ist nun möglich, dass, wenn sic
$F(x)$ einer bestimmten Grenze $F(a)$ zu
wir definitionsweise

$$(4) \qquad F(a) = \int_a^b f(x)\, d$$

Wenn ein solcher bestimmter Grenz
dann nennen wir das Integral (3) conve
mit der Annäherung von x an a unendl
stimmten Grenzwerth hat, dann heisst d
diesem Falle wird dem Zeichen (4) kein

Ein einfaches Kennzeichen der Con
folgendes:

I. Das Integral $F(x)$ convergir
tiver Exponent $k < 1$ so be

$$(x - a)^k f(x)$$

bei $x = a$ in endlichen Gre

Man darf aber nicht umgekehrt sc
solcher Exponent nicht existirt, das Int
Insbesondere lassen sich solche Fälle, i

$$\int_x^c f(x)\,dx > A\int_x^c \frac{dx}{x-a}.$$

Es ist aber

$$\int_x^c \frac{dx}{x-a} = \log\frac{c-a}{x-a},$$

was für $x = a$ unendlich wird.

Wenn die Function $f(x)$ statt an der unteren der oberen Grenze b unendlich wird, so ist die nur dass man die Function

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

mit der Annäherung von x an b zu betrachten ha

Der Fall endlich, dass $f(x)$ in einem inneren Integrationsintervalles (a, b) unendlich wird, w Formel (1) auf die beiden soeben betrachteten, s zurückgeführt.

3. Wenn das Integral

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

mit unendlich wachsendem x einer bestimmten strebt, so setzen wir

$$C = \int^{\infty} f(x)\,dx,$$

Hiernach ist die Bedeutung der Zei

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x$$

gleichzeitig mit erklärt. Hier gilt das f
die Convergenz:

III. Das Integral $F(x)$ convergirt
ein Exponent $k > 1$ finden l

$$x^k f(x)$$

für $x = \infty$ in endlichen Gre

Auch dieses Kriterium ist nicht umk
sonders die Fälle von Bedeutung, in dene
aufhörlich ihr Vorzeichen wechselt, etw
schen Functionen $\sin x$, $\cos x$.

Man unterscheidet bedingt conver
convergente Integrale und nennt unb
grale solche, bei denen die Convergenz
Function $f(x)$ überall durch ihren absol
Bei den bedingt convergenten Integra
Convergenz wesentlich darauf, dass sich
tiven Bestandtheile, deren jeder für sic
stimmter Weise gegenseitig aufheben.

Als nothwendige und hinreichende
vergenz ist Folgendes zu bemerken:

IV. Das Integral

§. 5.

Der erste Mittelwerthsatz.

Bedeutet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Reihe positiver Zal
$h_1, h_2, \ldots, h_n$ eine zweite Reihe beliebiger Zahlen,
Summe

$$A = h_1 a_1 + h_2 a_2 + \cdots h_n a_n$$

vergrössert, wenn man die sämmtlichen h durch
unter ihnen, G, und verkleinert, wenn man sie durch
g, ersetzt; es ist also

$$g(a_1 + a_2 \cdots + a_n) < A < G(a_1 + a_2 \cdots$$

und wenn man also

$$(1) \qquad A = m(a_1 + a_2 \cdots + a_n)$$

setzt, so ist m ein Mittelwerth unter den verschiede
von h, d. h. m genügt der Ungleichung

$$(2) \qquad g < m < G,$$

und das Zeichen $<$ würde nur dann durch das Glei
zu ersetzen sein, wenn alle h und folglich auch
ander gleich sind.

Die Formel (1) gilt natürlich ebenso, wenn die
alle negativ sind.

Dieser Satz lässt sich auf die das bestin
definirende Summe anwenden und giebt dann folge

wird, und der Grenzübergang zu
Formel

$$(4) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx =$$

Hierin ist, um das Gesagte zu
tion, die in dem Intervalle (a, b) ni
unstetig sein kann. $\psi(x)$ ist eine
und ξ ist ein im Allgemeinen nicl
Intervalle Δ.

Natürlich gilt die Formel ebe
nicht positiv wird; und wenn di
sollte, so tritt an Stelle von $\psi(\xi$
der unteren und oberen Grenze d

Die Formel (4) nennen wir
Einen speciellen Fall davon erha
annehmen:

$$(5) \qquad \int_a^b f(x)\,dx =$$

§.

Der zweite Mi

Der zweite Mittelwerthsatz b
grale, in denen die integrirte Fu
tionen ist. Es sei also

Nun theilen wir das Intervall Δ in Theilinter
indem wir die Punkte

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

in dieser Grössenfolge annehmen, und dabei

$$(3) \qquad \alpha_0 = a, \qquad \alpha_n = b, \qquad \alpha_i - \alpha_{i-1} = \delta_i$$

setzen. Dann ist nach dem ersten Mittelwerthsatze

$$(4) \qquad F(\alpha_i) - F(\alpha_{i-1}) = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi_i)\, \delta$$

wenn ξ_i ein Mittelwerth in dem Intervalle δ_i ist. Dies
multipliciren wir nun mit $\psi(\xi_i)$ und bilden die Sum

$$\begin{aligned} \Sigma\, \varphi(\xi_i)\, \psi(\xi_i)\, \delta_i = \; & \psi(\xi_1)\, [F(\alpha_1) - F(\alpha_0)] \\ & + \psi(\xi_2)\, [F(\alpha_2) - F(\alpha_1)] \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + \psi(\xi_n)\, [F(\alpha_n) - F(\alpha_{n-1} \end{aligned}$$

oder, wenn man die Glieder dieser Summe anders a
$F(\alpha_0) = F(a)$, $F(\alpha_n) = F(b)$ setzt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Sigma\, \varphi(\xi_i)\, \psi(\xi_i)\, \delta_i = \; & F(\alpha_1)\, [\psi(\xi_1) - \psi(\xi_2)] \\ & + F(\alpha_2)\, [\psi(\xi_2) - \psi(\xi_3)] + \\ & + F(\alpha_{n-1})\, [\psi(\xi_{n-1}) - \psi(\xi_n) \\ & + \psi(\xi_n)\, F(b) - \psi(\xi_1)\, F(a). \end{aligned}$$

Nun haben nach der Voraussetzung die Differen

$$(7) \qquad \int_a^b \varphi(x)$$

$$= \psi(b)\,F(b) - \psi(a)\,F($$

Ueber die Stetigkeit der F
gesetzt. Es können sogar une
kommen, wenn nur die Bedin
wachsendem x nicht wächst od
der Formel (7), wie die Ableit
$\psi(a+0)$ und $\psi(b-0)$ unter

Auch die Function $\varphi(x)$, di
haben, kann Stetigkeitsunterbrec
was aber für die Anwendunge
und daher hier nicht weiter ve

Mit Benutzung der Relation

$$F(\xi) - F(a) = \int_a^\xi \varphi(x)\,dx,$$

können wir schliesslich dem zwei
Gestalt geben:

$$(8) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi$$

oder auch

$$(9) \qquad \int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^b \varphi$$

§. 7. Bedingt convergirende Integrale.

Ist

$$\int_a^x \varphi(x)\, dx$$

eine Function von x, die mit unendlich
dem x in endlichen Grenzen bleibt, und
Function, die von einem bestimmten
ständig abnimmt und sich dabei mit
wachsendem x der Grenze Null nähert,

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, \psi(x)\, dx$$

convergent.

Die Voraussetzung über die Function $\varphi(x)$ involv
bemerkt, nicht die Convergenz des Integrals

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx.$$

Der Beweis ergiebt sich aus dem Kriterium §. 4, I
dem zweiten Mittelwerthsatze. Danach ist nämlich

$$\int_b^c \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = \psi(b) \int_b^\xi \varphi(x)\, dx + \psi(c) \int_\xi^c \varphi(x$$

und man sieht, dass diese Grösse kleiner gemacht w
als eine beliebig kleine Grösse ω, wenn b und c g
als eine hinlänglich grosse Zahl n.

convergent. Beachtet ma
das Kriterium §. 4, I., so

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}$$

das erste convergirt, so
so lange α zwischen 0 un

Stetigkeit eines bes
ein

Wenn in einem besti

(1) $\Phi(y$

die unter dem Integralzei
von einer zweiten Variab
abhängt, so ist das Integr
Es gilt dann der Satz:

1. Wenn $f(x, y)$ e
Variablen x, y
tion von y.

Denn ist die Schwa

Integrationsintervalle positiv is
Integral

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx \tag{3}$$

convergirt, und wenn $\varphi(x, y)$ i
Grenzen bleibt und für endliche x
Function von x, y ist.

Denn setzt man

$$\Phi(y) = \int_a^b \psi(x)\,\varphi(x, y)\,dx + \int_b^\infty \psi(x)\,\varphi(x,$$

so kann man zunächst b von y unabhängig
nehmen, dass das Integral

$$\int_b^\infty \psi(x)\,dx$$

und folglich auch

$$\int_b^\infty \psi(x)\,\varphi(x, y)\,dx$$

kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse
ist auch, während y ein Intervall δ durchläuft, d
dieses Integrals kleiner als $^1/_2\,\omega$, und dann kann
dem Satze 1. das Intervall δ so klein annehmen,
Schwankung des Integrals

$$\int^b$$

$$\int_b^\infty \psi(x)\,\varphi(x,y)\,dx < K\int_b^\infty |\,\psi(x)\,|\,dx$$

und kann durch ein von y unabhängiges, hinlänglich grosses b beliebig klein gemacht werden.

§. 9.

Stetigkeit eines Integrals bei bedingter Convergenz.

Wir wenden den zweiten Mittelwerthsatz an zum Beweise eines wichtigen Satzes über die Stetigkeit eines bestimmten Integrals:

Ist $\varphi(x)$ eine endliche Function von der Beschaffenheit, dass das Integral

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \tag{1}$$

convergirt, $\psi(x)$ eine stetige Function, die von einem bestimmten x an fortwährend abnimmt und sich mit unendlich wachsendem x der Grenze Null nähert, α eine Variable, die sich von positiven Werthen der Grenze Null nähert, so ist

$$\lim_{\alpha=0} \int_a^\infty \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx = \psi(0)\int_a^\infty \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

Es ist nämlich nach dem zweiten Mittelwerthsatze

$$\int_a^c \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx + \psi(\alpha b)\int_b^\xi \varphi(x)\,dx + \psi(\alpha c)\int_\xi^c \varphi(x)\,dx$$

$$a < b < \xi < c,$$

und für $c = \infty$

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx + \psi(\alpha b)\int_b^\xi \varphi(x)\,dx$$

$$b < \xi,$$

ferner

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_b^\infty \varphi(x)\,dx,$$

und daraus

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,\psi(\alpha x)\,dx - \psi(0)\int_a^\infty \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,[\psi(\alpha x) - \psi(0)]\,dx + \psi(\alpha b)\int_b^\xi \varphi(x)\,dx - \psi(0)\int_b^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Daraus lässt sich zeigen, dass man α so nahe an Null annehmen kann, dass die linke Seite dieser Gleichung, die von b gar nicht abhängt, beliebig klein wird.

Da $\psi(\alpha b)$ immer unter einer endlichen Grenze bleibt, so kann man zunächst nach der über $\varphi(x)$ gemachten Voraussetzung b, von α unabhängig, so gross annehmen, dass

$$\psi(\alpha b)\int_b^\xi \varphi(x)\,dx - \psi(0)\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

beliebig klein wird. Ist dies geschehen, so kann man α so klein machen, dass die Differenz

$$\psi(\alpha x) - \psi(0)$$

für jedes x zwischen a und b und folglich auch das Integral

$$\int_a^b \varphi(x)\,[\psi(\alpha x) - \psi(0)]\,dx$$

beliebig klein wird. Damit ist der verlangte Beweis geführt.

Der am häufigsten angewandte specielle Fall dieses Satzes ist der, wo $\psi(x) = e^{-x}$ ist, und dann lautet unser Satz

$$\lim_{\alpha=0} \int_a^\infty e^{-\alpha x}\,\varphi(x)\,dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx,$$

wobei nur die Voraussetzung zu machen ist, dass das Integral rechter Hand convergirt.

§. 10.

Differentiation eines Integrals nach einem Parameter.

Die Sätze des vorigen Paragraphen geben uns ein Mittel zur Differentiation eines bestimmten Integrals. Wir stützen uns dabei auf den Fundamentalsatz der Differentialrechnung, dass, wenn $\varphi(y)$ eine Function von y ist, deren Differentialquotient $\varphi'(y)$ eine stetige Function von y ist, für ein beliebiges h, soweit die vorausgesetzte Stetigkeit besteht, die Formel gilt

$$(1) \qquad \frac{\varphi(y+h)-\varphi(y)}{h} = \varphi'(y+\vartheta h),$$

worin ϑ ein positiver echter Bruch ist.

Es sei nun $\varphi(x,y)$ eine Function von der Eigenschaft, dass der Differentialquotient

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \chi(x,y)$$

eine stetige Function von x und y ist, die zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen ist, und $\psi(x)$ wie früher eine Function, für die das Integral

$$\int_a^\infty \psi(x)\,dx$$

unbedingt convergirt.

Ist dann

$$(2) \qquad \Phi(y) = \int_a^\infty \psi(x)\,\varphi(x,y)\,dx,$$

so folgt

$$\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h} = \int_a^\infty \psi(x)\,\frac{\varphi(x,y+h)-\varphi(x,y)}{h}\,dx,$$

und nach (1)

$$\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h} = \int_a^\infty \psi(x)\,\chi(x,y+\vartheta h)\,dx;$$

wenn wir nun h gegen Null convergiren lassen und von dem Schlussverfahren des §. 8 Gebrauch machen, so folgt

$$(3) \qquad \frac{d\,\Phi(y)}{dy} = \int_a^\infty \psi(x)\,\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Man erhält also unter den gemachten Voraussetzungen den Differentialquotienten der durch (2) definirten Function $\Phi(y)$, indem man unter dem Integralzeichen nach y differentiirt.

Als specieller Fall ist hierin der der endlichen Grenzen enthalten. Man hat nur $\psi(x)$ zwischen a und b gleich 1 und zwischen b und ∞ gleich 0 anzunehmen. Dann ergiebt sich der Differentialquotient der Function

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi(x, y)\, dx \tag{4}$$

in der Form

$$\frac{\partial \Phi(y)}{d y} = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}\, d x, \tag{5}$$

und die einzige hierbei zu machende Voraussetzung ist die, dass der nach y genommene Differentialquotient von $\varphi(x, y)$ eine stetige Function von x und y sei.

§. 11.

Vertauschung der Integrationsfolge.

Durch die Umkehrung der Sätze des vorigen Paragraphen gelangen wir zu der Integration eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

Es sei, wie bisher, vorausgesetzt, dass das Integral

$$\int_a^\infty \psi(x)\, dx \tag{1}$$

unbedingt convergire. Es sei ferner $\chi(x, y)$ eine in endlichen Grenzen eingeschlossene stetige Function von x und y und

$$\varphi(x, y) = \int \chi(x, y)\, d y,$$

und folglich, wenn α, β zwei endliche Werthe sind,

$$\varphi(x, \beta) - \varphi(x, \alpha) = \int_\alpha^\beta \chi(x, y)\, d y. \tag{2}$$

Nun kann man die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty \psi(x)\,\varphi(x,y)\,dx = \int_a^\infty \psi(x)\,\chi(x,y)\,dx$$

zwischen den Grenzen α und β integriren und erhält links

$$\int_a^\infty \psi(x)\,[\varphi(x,\beta) - \varphi(x,\alpha)]\,dx,$$

oder wegen (2)

(3) $$\int_a^\infty \psi(x)\,dx \int_\alpha^\beta \chi(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^\infty \psi(x)\,\chi(x,y)\,dy.$$

Nehmen wir an, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von x das Integral

(4) $$\int_\alpha^\infty \chi(x,y)\,dy$$

convergent sei, und zwar so, dass das Integral (4) unter eine beliebig gegebene Grenze heruntersinkt, wenn α über einem von x unabhängigen, hinlänglich grossen Werthe liegt, so folgt aus den Stetigkeitssätzen des §. 8

(5) $$\int_a^\infty \psi(x)\,dx \int_\alpha^\infty \chi(x,y)\,dy = \int_\alpha^\infty dy \int_a^\infty \psi(x)\,\chi(x,y)\,dx,$$

und diese Formel gilt auch noch dann, wenn das Integral (4) für $x = \infty$ oder einen anderen besonderen Werth von x zu convergiren aufhört, wenn es nur mit der Annäherung von x an diesen Werth einen endlichen Werth nicht überschreitet und die unbedingte Convergenz des Integrals (1) festgehalten wird.

Als Specialfall ist auch hier die Vertauschbarkeit der Integrationsfolge bei endlichen Grenzen in diesen Sätzen enthalten, die sich in der Formel ausdrückt:

(6 $$\int_a^b dx \int_\alpha^\beta \chi(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b \chi(x,y)\,dx.$$

Wir wollen noch einen zweiten Satz über die Umkehrung der Integrationsfolge ableiten.

Es sei $f(x,y)$ eine Function, die für positive x, y nur positive oder wenigstens keine negativen Werthe annimmt und einen endlichen Grenzwerth nicht übersteigt. Dann hat das Integral

$$\int_0^x d\alpha \int_0^y f(\alpha,\beta)\, d\beta = F(x,y)$$

für jedes positive x, y einen bestimmten endlichen Werth, der sowohl mit wachsendem x als mit wachsendem y zunimmt (oder wenigstens nicht abnimmt). Wenn nun die Function $F(x,y)$ nicht über alle Grenzen wächst, so hat sie eine obere Grenze A, und wir können ein Zahlenpaar a, b so bestimmen, dass der Unterschied $A - F(a,b)$ kleiner ist als eine beliebig gegebene Grösse ω. Der Unterschied $A - F(x,y)$ wird dann um so mehr kleiner als ω sein, wenn $x > a$, $y > b$ ist, und es folgt daraus, dass A der Grenzwerth von $F(x,y)$ ist, wenn x und y irgendwie ins Unendliche wachsen.

Wenn das Integral

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\alpha,\beta)\, d\beta \tag{7}$$

convergirt, so ist die Voraussetzung dieses Satzes erfüllt und es folgt, dass der Werth dieses Integrals, den man aus $F(x,y)$ erhält, wenn man zuerst y und dann x ins Unendliche wachsen lässt, gleich A ist. Denselben Grenzwerth erhält man aber auch, wenn man x, y irgendwie anders, z. B. in umgekehrter Reihenfolge, ins Unendliche gehen lässt.

Der Beweis dieses Satzes beruht, wie man sieht, wesentlich darauf, dass das Integral

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty f(\alpha,\beta)\, d\beta - \int_0^a d\alpha \int_0^b f(\alpha,\beta)\, d\beta, \tag{8}$$

was aus lauter positiven Elementen besteht, für hinlänglich grosse a, b unter jede gegebene Grenze ω herunter sinkt, und dies ist, wenn $f(x,y)$ nicht negativ wird, eine Folge der Convergenz von (7). Diese Eigenschaft des Integrals (8) bleibt aber erhalten, wenn $f(x,y)$ der absolute Werth einer Function $\varphi(x,y)$ ist, die das Zeichen wechselt, wenn $f(\alpha,\beta)$ in (8) durch $\varphi(\alpha,\beta)$ ersetzt wird. Wenn wir also unter absoluter Convergenz eine solche verstehen, die bestehen bleibt, wenn das Integrationselement durchweg durch seinen absoluten Werth ersetzt wird, so haben wir den Satz:

Wenn von den beiden Integralen

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta)\, d\beta, \qquad \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

das eine absolut convergirt, so convergirt auch das andere, und beide haben denselben Werth.

Selbstverständlich können für die unteren Grenzen 0 auch beliebige andere constante Grenzen gesetzt werden.

§. 12.

Berechnung bestimmter Integrale. Erstes Beispiel.

Die Vertauschung der Integrationsfolge ist häufig das Mittel zur Werthbestimmung bestimmter Integrale, die sich nicht aus dem unbestimmten Integrale ableiten lassen. Wir betrachten einige Beispiele, die wir so auswählen, dass sie uns später nützlich sind.

Das Integral

$$C = \int_0^\infty e^{-z^2}\, dz \tag{1}$$

ist convergent und hat einen bestimmten positiven Werth C. Substituiren wir darin

$$z = xy, \qquad dz = x\, dy$$

und verstehen unter x eine positive Constante, unter y die neue Integrationsvariable, so folgt

$$C = x \int_0^\infty e^{-x^2 y^2}\, dy.$$

Hier multipliciren wir nun mit $e^{-x^2} dx$ und integriren noch einmal in Bezug auf x von 0 bis ∞. Dadurch ergiebt sich, wenn man in (1) z durch x ersetzt:

$$C^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} x\, dx \int_0^\infty e^{-x^2 y^2}\, dy,$$

und da hier nun die Bedingungen für die Umkehrbarkeit der Integrationsfolge erfüllt sind:

$$C^2 = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-(1+y^2)x^2} x\,dx.$$

Nun ist die Integration unbestimmt ausführbar. Es ist :unächst

$$\int_0^\infty e^{-(1+y^2)x^2} x\,dx = \frac{1}{2(1+y^2)}$$

ınd sodann

$$\int_0^\infty \frac{dy}{2(1+y^2)} = \frac{\pi}{4},$$

und folglich, wenn man die Wurzel zieht:

(2) $$C = \int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Hieraus folgt auch der Werth des Integrals

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Ist p eine positive, q eine beliebige reelle Constante, so kann man in diesem Integrale die Substitution

$$z = x\sqrt{p} + \frac{q}{\sqrt{p}}$$

machen und erhält:

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-2qx} dx = e^{\frac{q^2}{p}} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Ein anderes bemerkenswerthes Integral erhalten wir daraus auf folgende Weise: Wenn man in dem Integrale

(5) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2} dz = 1$$

die Substitution macht

$$z = \alpha - \frac{q}{\alpha}, \qquad dz = \left(1 + \frac{q}{\alpha^2}\right) d\alpha,$$

worin q eine positive Grösse ist, und α von $\sqrt{q}$ bis ∞ geht, so erhält man

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{q}}^{\infty} e^{-\left(\alpha-\frac{q}{\alpha}\right)^2} d\alpha + \frac{2q}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{q}}^{\infty} e^{-\left(\alpha-\frac{q}{\alpha}\right)^2}\frac{d\alpha}{\alpha^2} = 1.$$

Im zweiten dieser Integrale substituire man

$$\alpha_1 = \frac{q}{\alpha}, \qquad d\alpha_1 = -\frac{q}{\alpha^2}\,d\alpha,$$

so dass α_1 die Grenzen $\sqrt{q}$ und 0 erhält. Setzt man dann wied α an Stelle von α_1, so ergiebt sich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha-\frac{q}{\alpha}\right)^2} d\alpha = 1,$$

oder endlich

(6) $$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2-\frac{q^2}{\alpha^2}} d\alpha = e^{-2q}.$$

Die Formel (5) lässt sich noch auf eine andere Weise ve allgemeinern. Man erhält nämlich durch die Substitution $z\sqrt{}$ für z

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},$$

und dies lässt sich beliebig oft in Bezug auf α differentiire Setzt man dann wieder $\alpha = 1$, so folgt für jedes ganze positive

(7) $$\int_0^{\infty} e^{-z^2} z^{2n}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§. 13.

Zweites Beispiel.

Als zweites Beispiel wollen wir das Integral betrachten

(1) $$A = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon y}\sin y\,\frac{dy}{y},$$

worin ε eine positive Constante sein soll. Es ist aber, wie si durch unmittelbare Integration ergiebt, für jedes positive y

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-yx}\,dx = \frac{e^{-\varepsilon y}}{y},$$

und wenn wir dies in A einsetzen:

$$A = \int_0^\infty \sin y \, dy \int_\varepsilon^\infty e^{-yx} \, dx,$$

oder nach Umkehrung der Integrationsfolge:

(2) $$A = \int_\varepsilon^\infty dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy.$$

Es ergiebt sich aber durch Differentiation

$$\frac{d}{dy} e^{-xy} (\cos y + x \sin y) = -(1 + x^2) e^{-xy} \sin y.$$

und hieraus durch Integration nach y:

(3) $$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Es folgt also

$$A = \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,cotg} \varepsilon,$$

wenn $\operatorname{arc\,cotg} \varepsilon$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen ist. Also haben wir das Integral

(4) $$\int_0^\infty e^{-\varepsilon y} \sin y \frac{dy}{y} = \operatorname{arc\,cotg} \varepsilon.$$

Ist b eine positive Constante, so kann man in (4) y durch by ersetzen, und wenn man noch $\varepsilon b = a$ setzt, so folgt

(5) $$\int_0^\infty e^{-ay} \sin by \frac{dy}{y} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{a}{b} = \operatorname{arc\,tng} \frac{b}{a}.$$

und diese Formel bleibt auch für negative b richtig, wenn $\operatorname{arc\,tng}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ genommen wird.

Da das Integral, wie in §. 7 gezeigt ist, noch convergent bleibt, wenn $a = 0$ wird, so können wir seinen Werth nach dem Satze des §. 9 bestimmen, und erhalten:

(6) $$\int_0^\infty \frac{\sin by}{y} \, dy = \frac{\pi}{2}.$$

Diese Formel ist nur richtig, wenn b positiv ist. Für $b = 0$ ist die linke Seite $= 0$ und ergiebt für negative b den entgegengesetzten Werth $-\frac{\pi}{2}$. Das Integral selbst ist also eine bei $b = 0$ unstetige Function von b.

§. 14.

Drittes Beispiel.

Ein in Anwendungen öfter vorkommendes Integral erhält man aus der oben schon benutzten Formel

$$\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$$

durch die Substitution

$$y = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\omega, \qquad dy = \frac{A}{B}\frac{d\omega}{\cos^2\omega},$$

worin A, B positive Constanten sind. Die Integrationsgrenzen für ω sind 0 und $\frac{\pi}{2}$, so dass man erhält

$$(1) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{A^2\sin^2\omega + B^2\cos^2\omega} = \frac{\pi}{2AB}.$$

Setzt man weiter

$$\sin^2\omega = 1 - \cos^2\omega, \qquad A^2 = a^2, \qquad B^2 - A^2 = b^2,$$

so folgt daraus

$$(2) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2+b^2}},$$

worin a und $\sqrt{a^2+b^2}$ positiv ist.

Hierin kann man auf der linken Seite die Zerlegung anwenden

$$a^2 + b^2\cos^2\omega = (a + bi\cos\omega)\,(a - bi\cos\omega)$$

$$\frac{2a}{a^2+b^2\cos^2\omega} = \frac{1}{a+bi\cos\omega} + \frac{1}{a-bi\cos\omega},$$

vorin $i = \sqrt{-1}$ ist, und erhält:

$$(3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a^2 + b^2\cos^2\omega} = \frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a + bi\cos\omega} + \frac{1}{2a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega}.$$

Das letzte dieser Integrale ergiebt durch die Substitution $\pi - \omega$ für ω,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{a - bi\cos\omega} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\omega}{a + bi\cos\omega},$$

und danach lassen sich die beiden Integrale auf der rechten Seite von (3) durch ein einziges zwischen den Grenzen 0 und π ersetzen. Man erhält so

$$(4)\quad \int_0^{\pi} \frac{d\omega}{a + bi\cos\omega} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

In dieser Formel, in der die Quadratwurzel $\sqrt{a^2 + b^2}$ positiv ist, ist dann a eine beliebige positive Constante, während b sowohl positiv als negativ sein kann (es könnte sogar b^2 negativ sein, wenn nur $a^2 + b^2$ positiv bleibt).

Zweiter Abschnitt.

Der Fourier'sche Lehrsatz.

§. 15.

Das Dirichlet'sche Integral.

Das im §. 13 abgeleitete Integral:

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin xy}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{für } x > 0,$$

ist ein specieller Fall eines sehr allgemeinen, von **Dirichlet** zuerst bestimmten Integrals, welches seiner mannigfachen Anwendungen wegen von grosser Wichtigkeit ist. Zur Ableitung dieses Integrals wollen wir jetzt übergehen. Wenn wir unter μ eine beliebige positive Grösse verstehen, so ist das Integral

$$L = \int_a^b \frac{\sin \lambda\mu}{\lambda}\, d\lambda,$$

welches für $a = 0$, $b = \infty$ in das Integral (1) übergeht, für **beliebige** Grenzen zu untersuchen. Wir können den Werth zwar nicht allgemein bestimmen, wohl aber seinen Grenzwerth für ein unendlich wachsendes μ. Wenn wir nämlich unter dem Integralzeichen eine neue Variable $\lambda\mu = x$ einführen, so erhalten wir

$$L = \int_{a\mu}^{b\mu} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Wenn nun a und b positiv sind, so nähert sich dies Integral mit unendlich wachsendem μ wegen der Convergenz des Inte-

als (1) der Grenze 0. Ist aber $a = 0$ und b positiv, so erhält den Grenzwerth $\pi/2$. Wir erhalten also das erste Resultat:

$$\lim_{\mu=\infty} \int_a^b \frac{\sin \lambda \mu}{\lambda} d\lambda = 0 \qquad 0 < a < b,$$

$$\lim_{\mu=\infty} \int_0^b \frac{\sin \lambda \mu}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2} \qquad 0 < b.$$

Aus der Formel

$$\int_0^a \frac{\sin \lambda \mu}{\lambda} d\lambda = \int_0^{a\mu} \frac{\sin x}{x} dx$$

nnen wir auf den folgenden, etwas allgemeineren Satz schliessen:

Es ist

$$\lim \int_0^a \frac{\sin \lambda \mu}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2},$$

nn μ ins Unendliche wächst und gleichzeitig a so unendlich ein wird, dass $a\mu$ noch unendlich gross wird. Man erreicht es z. B. dadurch, dass man $a = \mu^{-\frac{1}{2}}$ annimmt.

Die Formeln I. gelten überhaupt auch dann, wenn a und b t μ variabel sind, vorausgesetzt nur, dass $a\mu$ und $b\mu$ mit μ gleich unendlich werden.

Es sei nun $\psi(x)$ eine Function, die in dem Intervalle (a, b) e folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\psi(x)$ bleibt in endlichen Grenzen.
2. $\psi(x)$ ist in dem Intervalle mit wachsendem x nicht wachsend oder nicht abnehmend[1].

Wir suchen das Integral

$$\int_0^b \psi(\lambda) \frac{\sin \lambda \mu}{\lambda} d\lambda,$$

[1]) Für die Anwendungen würde es genügen, die Function $\psi(x)$ stetig zunehmen. Die Beweise sind aber ebenso einfach ohne diese Voraussetzung zu führen, wenn man noch bedenkt, dass nach den Sätzen von emann (vgl. §. 4, Anm.) die Function $\psi(x)$ unter den Voraussetzungen 2. immer integrirbar ist, und dass das Product zweier integrirbarer nctionen gleichfalls integrirbar ist.

oder vielmehr dessen Grenzwerth für ein unendlich wachsendes μ. Hier können wir den zweiten Mittelwerthsatz anwenden und erhalten, indem wir zwischen 0 und b eine noch unbestimmte Grösse a einschieben und unter ξ, η Mittelwerthe

$$0 \leqq \xi \leqq a \leqq \eta \leqq b$$

verstehen:

$$(2)\quad \begin{aligned} \int_0^a \psi(\lambda)\frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda &= \psi(0)\int_0^\xi \frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda + [\psi(a)-\psi(0)]\int_\xi^a \frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda,\\ \int_a^b \psi(\lambda)\frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda &= \psi(a)\int_a^\eta \frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda + \psi(b)\int_\eta^b \frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda,\end{aligned}$$

worin bei etwaiger Unstetigkeit unter $\psi(0)$, $\psi(a)$ in der ersten Formel $\psi(+0)$, $\psi(a-0)$ und unter $\psi(a)$, $\psi(b)$ in der zweiten $\psi(a+0)$, $\psi(b-0)$ zu verstehen ist.

Wenn wir zunächst in der zweiten dieser Formeln μ bei festgehaltenem a unendlich werden lassen, so ergiebt sich nach I.:

$$\text{III.}\qquad \lim_{\mu=\infty}\int_a^b \psi(\lambda)\frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda = 0,\qquad 0 < a < b.$$

Lässt man aber a mit unendlich wachsendem μ unendlich klein, $a\mu$ aber noch unendlich gross werden, so wird in der ersten Formel $\psi(a)-\psi(0)$ unendlich klein, und das Integral

$$\int_\xi^a \frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda$$

wird jedenfalls nicht unendlich, wenn man auch seinen genauen Grenzwerth wegen des unbekannten ξ nicht angeben kann. Die beiden Integrale mit der Grenze η in der zweiten Formel (2) werden nach I. mit unendlich wachsendem μ unendlich klein. Addirt man also die beiden Formeln (2) und geht dann zur Grenze $\mu=\infty$ über, so folgt aus II.:

$$\text{IV.}\qquad \lim_{\mu=\infty}\int_0^b \psi(\lambda)\frac{\sin\lambda\mu}{\lambda}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}\psi(+0).$$

Da hier die rechte Seite von b ganz unabhängig ist, so folgt auch wieder die Formel III. aus IV.

§. 16.

Verallgemeinerungen.

Die Sätze lassen sich von den gemachten Voraussetzungen
eilweise befreien:

1. Wenn die Function $\psi(x)$ an der oberen Grenze b des Intervalles unendlich wird, jedoch so, dass das Integral

$$\int_a^b \psi(x)\, dx \qquad (1)$$

convergent ist, so bleiben die Formeln III. und IV. gültig.

Denn zunächst sind diese Formeln zweifellos anwendbar auf
s Intervall $(0, b - \varepsilon)$, und wenn sich nun beweisen lässt, dass
s Integral

$$\int_{b-\varepsilon}^b \psi(\lambda) \frac{\sin \mu \lambda}{\lambda}\, d\lambda$$

i hinlänglich verkleinertem ε für jedes μ einen unendlich
einen Beitrag zu dem ganzen Integrale liefert, so folgt die
chtigkeit der Formeln in dem ursprünglichen Intervalle.

Nach der Voraussetzung, dass $\psi(x)$ nicht wachsen oder nicht
nehmen und doch unendlich werden soll, können wir zunächst
so klein annehmen, dass $\psi(x)$ im Intervalle $(b - \varepsilon, b)$ keine
ichenänderung mehr erleidet, also etwa positiv bleibt. Da
er $\sin \mu \lambda$ ein echter Bruch ist, so ist im Intervalle $(b - \varepsilon, b)$

$$\left| \frac{\sin \mu \lambda}{\lambda} \right| < \frac{1}{b - \varepsilon},$$

id mithin, dem absoluten Werthe nach,

$$\int_{b-\varepsilon}^b \psi(\lambda) \frac{\sin \mu \lambda}{\lambda}\, d\lambda < \frac{1}{b - \varepsilon} \int_{b-\varepsilon}^b \psi(\lambda)\, d\lambda,$$

id dies wird wegen der vorausgesetzten Convergenz des Inte-
rals (1) mit ε zugleich unendlich klein.

Gleiches gilt für die Formel III., wenn $\psi(x)$ für $x = a$ so

unendlich wird, dass die Convergenz des Integrals (1) nicht aufhört.

2. Die Sätze III. und IV. gelten auch dann noch, wenn das Intervall $(0, b)$ in eine endliche Anzahl von Theilintervallen zerfällt, in deren jedem einzeln durch die Function $\psi(x)$ die Voraussetzung §. 15, 1., 2., befriedigt ist.

Um dies einzusehen, braucht man nur die Formeln III. oder IV. auf jedes der Theilintervalle anzuwenden, in denen die Voraussetzungen dieser Formeln erfüllt sind, und die erhaltenen Resultate zu addiren.

Dasselbe gilt, wenn die Function an einer oder mehreren Stellen des Intervalls unendlich wird, wenn nur die Function in dem Intervalle integrirbar bleibt.

3. Ersetzen wir unter dem Integralzeichen in der Formel IV. die Variable λ durch $-\lambda$, so folgt

$$\lim_{\mu = \infty} \int_{-b}^{0} \psi(-\lambda) \frac{\sin \lambda\mu}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}\, \psi(+0),$$

und wenn wir, was nur eine veränderte Bezeichnung ist, $\psi(-x)$ durch $\psi(x)$ ersetzen:

$$\lim_{\mu = \infty} \int_{-b}^{0} \psi(\lambda) \frac{\sin \lambda\mu}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}\, \psi(-0). \tag{2}$$

Hiernach lassen sich die Formeln III. und IV. auch auf negative Werthe der Grenzen ausdehnen, und wenn wir dies alles zusammenfassen, so erhalten wir die folgende allgemeine Fassung des Satzes von Dirichlet:

V. Es sei $\psi(x)$ eine Function von x, die in dem Intervalle (a, b) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, die ausserdem in einer endlichen Anzahl von Punkten so unendlich wird, dass das Integral

$$\int \psi(x)\, dx$$

an allen diesen Stellen convergent bleibt, dann ist der Grenzwerth

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \psi(\lambda) \frac{\sin \mu\lambda}{\lambda} d\lambda = 0,$$

wenn a, b gleiche Zeichen haben,

$$= \frac{1}{2} [\psi(+0) + \psi(-0)],$$

wenn a und b verschiedene Zeichen haben,

$$= \frac{1}{2} \psi(+0),$$

wenn $a = 0$, $b > 0$,

$$= \frac{1}{2} \psi(-0),$$

wenn $b = 0$, $a < 0$,

vorausgesetzt, dass $\psi(+0)$ und $\psi(-0)$ endliche Werthe haben.

Die Function $\psi(x)$ ist hier eine sogenannte willkürliche nction, wie man sie in der mathematischen Physik häufig betrachten hat, d. h. die Function braucht durchaus nicht nd einem einheitlichen analytischen Gesetze zu folgen.

Die jetzt noch in V. enthaltenen Voraussetzungen können . Theil noch aufgegeben werden, worauf aber hier nicht ;egangen werden soll [1]).

§. 17.

Das Fourier'sche Doppelintegral.

Aus dem zuletzt bewiesenen Satze lässt sich nun sehr leicht Fourier'sche Doppelintegral ableiten, welches bei der Inte- ;ion von partiellen Differentialgleichungen mannigfache An- dungen gestattet.

Es sei also wieder $\psi(x)$ eine Function von x, die in einem ›rvalle (a, b) den Bedingungen des Satzes V. des vorigen agraphen genügt. Es soll der Werth des Doppelintegrals

---

[1]) Hierüber ist zu vergleichen die Abhandlung von Riemann: „Ueber Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe“, und rere Abhandlungen von P. du Bois-Reymond.

$$(1) \qquad \Phi = \int_0^\infty d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda \, d\lambda]$$

ermittelt werden.

Nach §. 4, 3. ist

$$(2) \qquad \Phi = \lim_{\mu = \infty} \int_0^\mu d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda \, d\lambda.$$

So lange μ endlich ist, können wir in dem Integrale Reihenfolge der Integrationen vertauschen (§. 11), und erhalt

$$\int_0^\mu d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda \, d\lambda = \int_a^b \psi(\lambda) \, d\lambda \int_0^\mu \cos\alpha\lambda \, d\alpha$$

$$= \int_a^b \psi(\lambda) \frac{\sin\mu\lambda}{\lambda} \, d\lambda,$$

also

$$\Phi = \lim_{\mu = \infty} \int_a^b \psi(\lambda) \frac{\sin\mu\lambda}{\lambda} \, d\lambda,$$

und folglich erhalten wir nach V. des vorigen Paragraphen

VI. $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda \, d\lambda = 0,$

wenn a, b gleiche Zeichen haben;

$$= \frac{1}{2} [\psi(+0) + \psi(-0)],$$

wenn a, b verschiedene Zeichen haben;

$$= \frac{1}{2} \psi(+0),$$

wenn $a = 0$, $b > 0$;

$$= \frac{1}{2} \psi(-0),$$

wenn $b = 0$, $a < 0$.

Man sieht hieraus, dass, wenn b positiv geworden ist, Werth dieses Integrals von b nicht mehr abhängt, und es l also nahe, b ins Unendliche wachsen zu lassen. Dies wird nur dann von Nutzen sein, wenn

$$\lim_{b=\infty} \int_0^\infty d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda = \int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda$$

und es wird also noch festzustellen sein, unter welchen aussetzungen über die Function $\psi(\lambda)$ die Gleichung (3) er- ist.

Wenn die Formel (3) für ein positives α richtig ist, so t ihre Gültigkeit für ein negatives oder verschwindendes α uittelbar aus VI., und es ist also zu untersuchen, ob und er welchen Voraussetzungen das Integral

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda,$$

für alle positiven a, wiederum nach VI., denselben Werth verschwindet.

Wir werden zeigen, dass dies unter der Voraussetzung statt- et, dass das Integral

$$\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda$$

edingt convergent sei. Unter dieser Voraussetzung ist nämnach §. 11, (3)

$$\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)\, d\lambda}{\lambda} \int_0^\mu \lambda \cos\alpha\lambda\, d\alpha = \int_0^\mu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda,$$

folglich nach Ausführung der Integration nach α

$$\int_0^\mu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin\mu\lambda\, d\lambda.$$

Da nun $\sin\mu\lambda$ dem absoluten Werthe nach immer kleiner 1 ist, so folgt für jedes μ

$$\int_0^\mu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos\alpha\lambda\, d\lambda < \int_a^\infty \left|\frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\right| d\lambda.$$

Hier kann nun in Folge der vorausgesetzten unbedingten ivergenz des Integrals (5) die rechte Seite beliebig klein ge- cht werden, wenn man a genügend gross nimmt, und folglich

kann der von a unabhängige Grenzwerth der linken Seite von (6) für ein unendlich wachsendes μ, d. h. das Integral (4) nur den Werth Null haben. Die unbedingte Convergenz von (5) ist also eine hinreichende Bedingung für die Richtigkeit von (3).

Eine ganz entsprechende Betrachtung lässt sich durchführen, wenn man in VI. die untere Grenze $a = -\infty$ werden lässt, und so gelangt man unter den über die Function $\psi(x)$ gemachten Voraussetzungen zu der Formel

$$(7) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\, d\lambda = \frac{1}{2}\,[\psi(+0) + \psi(-0)],$$

und diese Formel enthält auch wieder den Satz VI. als speciellen Fall, den man daraus erhält, wenn man $\psi(x)$ ausserhalb des Intervalles (a, b) gleich Null setzt.

Ist nun x ein beliebiger Werth, so setze man

$$(8) \qquad \psi(\lambda - x) = f(\lambda)$$

und substituire unter dem Integralzeichen in (7) $\lambda - x$ für λ. So ergiebt sich

$$(9) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x)\, d\lambda = f(x),$$

wenn man unter $f(x)$ an einer Unstetigkeitsstelle das arithmetische Mittel zwischen $f(x + 0)$ und $f(x - 0)$ versteht.

Die Formel (9) ist das Fourier'sche Doppelintegral, welches zur Darstellung der willkürlichen Function $f(x)$ dient.

Es gilt, um dies nochmals hervorzuheben, für eine willkürliche Function $f(x)$, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. $f(x)$ hat in jedem endlichen Intervalle Maxima und Minima nur in endlicher Anzahl.
2. Die Function $f(x)$ kann in einzelnen Punkten unendlich werden, jedoch nur so, dass das Integral
$$\int f(x)\, dx$$
in diesen Punkten convergent bleibt.
3. Das Integral
$$\int \frac{f(x)}{x}\, dx$$
ist für $x = +\infty$ und $x = -\infty$ unbedingt convergent.

4. Wenn die Function f unstetig ist, so ist unter $f(x)$ das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

zu verstehen.

Im Uebrigen ist die Function $f(x)$ willkürlich und x ist ein beliebiger Punkt, für den nach V. nur solche Lagen ausgeschlossen sind, für die $f(x+0)$ oder $f(x-0)$ nicht endlich ist. Für solche Ausnahmepunkte würden beide Seiten der Formel (9) keinen bestimmten Sinn mehr haben.

§. 18.

Specielle Formen des Fourier'schen Theorems.

Wir leiten noch zwei specielle Formen des Fourier'schen Lehrsatzes ab, die oft angewandt werden.

Durch Zerlegung des Cosinus können wir das Integral (9) in zwei Theile spalten und erhalten

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos\lambda\alpha\, d\lambda$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\sin\lambda\alpha\, d\lambda.$$

Wir nehmen nun zunächst an, es sei $f(x)$ den allgemeinen Bedingungen gemäss, aber nur für positive x, gegeben; dann können wir $f(x)$ für negative x und für $x=0$ noch beliebig annehmen, und wir machen zunächst die Annahme

$$(2)\qquad f(x)=f(-x),\qquad f(0)=f(+0).$$

Dann ist auch $f(+0)=f(-0)$ und die Function $f(x)$ also im Nullpunkte stetig.

Nun ist aber wegen (2)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\cos\lambda\alpha\, d\lambda=\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda\alpha\, d\lambda+\int_{-\infty}^0 f(\lambda)\cos\lambda\alpha\, d\lambda$$
$$=2\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda\alpha\, d\lambda,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \sin \lambda \alpha \, d\lambda = \int_{0}^{\infty} f(\lambda) \sin \lambda \alpha \, d\lambda + \int_{-\infty}^{0} f(\lambda) \sin \lambda \alpha \, d\lambda$$
$$= 0,$$

und folglich ergiebt sich aus (1)

$$(3) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos \alpha x \, d\alpha \int_{0}^{\infty} f(\lambda) \cos \alpha \lambda \, d\lambda.$$

Machen wir aber zweitens die Annahme

$$(4) \qquad f(x) = -f(-x),$$

so ist auch $f(+0) = -f(-0)$, und der Mittelwerth giebt

$$f(0) = 0.$$

Es ist jetzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda \alpha \, d\lambda = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \sin \lambda \alpha \, d\lambda = 2 \int_{0}^{\infty} f(\lambda) \sin \lambda \alpha \, d\lambda,$$

und es ergiebt sich

$$(5) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin \alpha x \, d\alpha \int_{0}^{\infty} f(\lambda) \sin \alpha \lambda \, d\lambda.$$

Durch die Formeln (3) und (5) kann eine und dieselbe Function $f(x)$ für positive x dargestellt werden. Die Formel (3) giebt aber bei dieser Darstellung den Werth der Function auch noch für $x = 0$, während (4) für $x = 0$ den Werth Null giebt.

§. 19.

Beispiele.

Man kann das Fourier'sche Theorem zur Werthbestimmung bestimmter Integrale benutzen, wovon hier ein Beispiel.

Wir setzen in den Formeln §. 18, (3), (5)

$$(1) \qquad f(x) = e^{-\beta x},$$

worin β ein beliebiger positiver Parameter ist.

Es ist dann

$$\frac{d}{d\lambda} e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda = -\beta e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda - \alpha e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda,$$

$$\frac{d}{d\lambda} e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda = -\beta e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda + \alpha e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda,$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞:

$$1 = \beta \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda\, d\lambda + \alpha \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda\, d\lambda,$$

$$0 = \alpha \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda\, d\lambda - \beta \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda\, d\lambda,$$

und daraus:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \cos\alpha\lambda\, d\lambda &= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}, \\ \int_0^\infty e^{-\beta\lambda} \sin\alpha\lambda\, d\lambda &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Dies sind aber gerade die inneren Integrale in den Formeln (3) und (5), §. 18, wenn $f(x) = e^{-\beta x}$ gesetzt wird, und demnach ergeben sich die beiden bestimmten Integrale

$$(3)\qquad \begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x\, d\alpha}{\alpha^2+\beta^2} &= \frac{\pi}{2\beta} e^{-\beta x}, \\ \int_0^\infty \frac{\alpha \sin\alpha x\, d\alpha}{\alpha^2+\beta^2} &= \frac{\pi}{2} e^{-\beta x}, \end{aligned}$$

die aber nur für positive x gültig sind. Die erste Formel ist auch noch für $x = 0$ richtig, die zweite aber nicht.

Ein zweites Beispiel erhalten wir, wenn wir

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \qquad 0 < x < 1, \\ f(x) &= 0, \qquad 1 < x \end{aligned}$$

nehmen, dann ergiebt das Integral §. 18, (3)

$$
(4) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x \sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha = 1, \qquad x^2 < 1
$$
$$
= \frac{1}{2}, \qquad x^2 = 1
$$
$$
= 0, \qquad x^2 > 1.
$$

Dieses Integral, das sich auch leicht aus dem im §. 13 betrachteten Integrale ableiten lässt, hat Dirichlet als „discontinuirlichen Factor“ zur Reduction mehrfacher bestimmter Integrale verwandt[1]).

---

[1]) Dirichlet's Werke, Bd. I, S. 391.

Dritter Abschnitt.

Unendliche Reihen.

§. 20.

Convergenz von Reihen überhaupt.

Unter einer unendlichen Reihe verstehen wir im Allgemeinen ein nach einem bestimmten Gesetz geordnetes System positiver, negativer, oder auch verschwindender Zahlgrössen

(1) $$a_0, a_1, a_2, \ldots \text{ in inf.}$$

Wir bezeichnen mit s_n die Summe der $n + 1$ ersten Glieder dieser Reihe:

(2) $$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

1. Die Reihe heisst convergent, wenn diese Summe s_n sich mit unendlich wachsenden n einer bestimmten endlichen Grenze nähert, wenn also

(3) $$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} s_n = A$$

eine bestimmte endliche Grösse ist.

Dieser endliche Grenzwerth wird die Summe der Reihe (1) genannt.

Die Theorie der Convergenz unendlicher Reihen ist, wie der Leser bemerken wird, durchaus analog mit der Theorie der Convergenz von Integralen. Obwohl aber der Begriff einer convergenten Reihe einfacher und leichter aufzufassen ist, als der eines convergenten Integrals, so ist hier doch die Betrachtung der Integrale vorangestellt, weil die Ableitung der Sätze dabei einfacher ist, und die Integrale öfter mit Vortheil bei der Untersuchung convergenter Reihen angewandt werden, als umgekehrt.

Ein allgemeines und immer gültiges Kennzeichen für die Convergenz einer Reihe, im Grunde nur eine andere Formulirung der Definition der Convergenz, ist folgendes.

2. Die Reihe (1) convergirt, wenn die Summe

$$\varrho_{n,m} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} \tag{4}$$

dem absoluten Werthe nach kleiner wird als eine beliebig kleine Grösse ω, wenn n und $n + m$ beide grösser sind als eine hinlänglich grosse Zahl N[1]).

§. 21.

Unbedingte Convergenz.

Wenn die Glieder der Reihe $a_0, a_1, a_2 \ldots$ alle positiv sind, so ist immer $s_n > s_{n-1}$, und es sind nur zwei Fälle möglich, entweder: s_n wächst mit n über alle Grenzen, die Summe der Reihe ist unendlich, oder: s_n nähert sich mit unbegrenzt wachsenden n von unten her einer endlichen Grenze A: die Reihe ist convergent. Wir führen folgende Beispiele an:

---

[1]) Zum Beweis völliger Uebereinstimmung von 1. und 2. sei für den mathematischen Leser Folgendes bemerkt. Zunächst ist ohne Weiteres klar, dass, wenn s_n nach der Definition 1. convergirt, die Bedingung 2. befriedigt sein muss, da ja die Schwankungen von s_n um den Grenzwerth A mit unendlich wachsenden n unendlich klein werden müssen.

Ist nun die Bedingung 2. erfüllt, so ist für eine beliebige Zahl z nur eines von beiden möglich.

a) Wie gross auch N sei, es giebt immer noch Werthe von $n > N$, für die $s_n > z$ wird (Zahlen a).

b) Man kann N so gross annehmen, dass, wenn $n > N$ ist, immer $s_n \lesseqgtr z$ (Zahlen b).

Man sieht nun, dass, wenn entweder nur Zahlen a oder nur Zahlen b existiren, die Bedingung 2. nicht befriedigt sein kann. Denn ist $\varrho_{n,m}$ absolut kleiner als ω, so kann s_{n+m} nicht grösser als $s_n + \omega$ und nicht kleiner als $s_n - \omega$ werden. Es muss also, wenn 2. erfüllt ist, sowohl Zahlen a als Zahlen b geben, und zugleich ist jedes a kleiner als jedes b. Die Zahlen a und b werden nach dem Princip der Stetigkeit, wie es von Dedekind formulirt ist (Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, 1892) durch einen Grenzpunkt A von einander geschieden, und wenn 2. befriedigt ist, so sind für ein hinlänglich grosses N alle s_n zwischen $A - \omega$ und $A + \omega$ enthalten, wie klein auch ω sein mag.

I. Die geometrische Reihe

$$E = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots$$

Ist $\alpha \geqq 1$, so ist $s_n \geqq n + 1$ und wächst also mit n ins Unendliche. Ist aber $\alpha < 1$, so ist

$$s_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha},$$

und es ist also $E = 1/(1 - \alpha)$ und die Reihe convergent.

II. Die Reihe

$$P = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \cdots$$

Wenn k negativ wäre, so würden schon die Glieder a_n, um so mehr also s_n ins Unendliche wachsen. Ist aber k positiv, dann schliessen wir so. Es ist nach dem Mittelwerthsatze

$$\frac{1}{(n+1)^k} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^k} < \frac{1}{n^k};$$

folglich, wenn wir

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}$$

setzen:

$$s_n < 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^k}, \quad s_n > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^k},$$

woraus sich nach Ausführung der Integration ergiebt:

$$s_n < \frac{k}{k-1} - \frac{1}{(k-1)\,n^{k-1}},$$

$$s_n > \frac{(n+1)^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k},$$

und für $k = 1$:

$$s_n > \log(n+1).$$

Daraus ist zu sehen, dass diese Reihe convergirt, wenn $k > 1$ ist und divergirt, wenn $k \leqq 1$ ist.

Diese Beispiele kann man zu allgemeineren Kennzeichen für die Convergenz von Reihen verwenden auf Grund des folgenden Lehrsatzes.

III. Sind

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

positive Glieder einer convergenten Reihe

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

und

$$c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$$

eine unbegrenzte Reihe beliebiger positiver, negativer oder auch verschwindender Zahlen, die ihrem absoluten Werthe nach alle unter einer endlichen Zahl c liegen, so ist auch die Reihe

$$S = c_0 a_0 + c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + \cdots$$

convergent.

Dann setzen wir wie im §. 20

$$\varrho_{n,m} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}$$

und entsprechend

$$R_{n,m} = c_{n+1} a_{n+1} + c_{n+2} a_{n+2} + \cdots + c_{n+m} a_{n+m},$$

so ist

$$-c\varrho_{n,m} < R_{n,m} < c\varrho_{n,m},$$

und es hat also $R_{n,m}$ zugleich mit $\varrho_{n,m}$ die Null zur Grenze.

Nimmt man in dem Satze III. die c theils $= +1$, theils $= -1$ oder theils gleich Null an, so folgt:

IV. Eine aus positiven Gliedern bestehende convergente Reihe bleibt convergent, wenn ihre Glieder mit beliebig wechselnden Vorzeichen genommen werden.

V. Jeder Theil einer convergenten Reihe mit positiven Gliedern ist wieder eine convergente Reihe.

Man darf nun aber nicht umgekehrt schliessen, dass eine convergente Reihe mit positiven und negativen Gliedern convergent bleibt, wenn man ihre Glieder positiv nimmt, und man muss danach zwei Arten convergenter Reihen unterscheiden:

VI. Eine convergente Reihe heisst unbedingt convergent, wenn sie auch dann noch convergent bleibt, wenn ihre Glieder alle positiv genommen werden, im entgegengesetzten Falle bedingt convergent.

Convergente Reihen mit nur positiven Gliedern sind daher immer unbedingt convergent.

§. 22.

Bedingte Convergenz.

Bei einer unbedingt convergenten Reihe

$$A = a_0 + a_1 + a_2 \cdots + \cdots$$

erhält man immer denselben Grenzwerth, wenn man eine Summe σ_N bildet, in die man alle Glieder a_n aufnimmt, in denen $n < N$ ist, aber ausserdem noch beliebige von den höheren Gliedern auswählend hinzunimmt, und dann N ins Unendliche wachsen lässt, auch wenn die Zahl der hinzugefügten höheren Glieder ins Unendliche wächst.

Man drückt dies Verhalten gewöhnlich so aus, dass die Summe einer unbedingt convergenten Reihe von der Reihenfolge der Summation unabhängig sei, ein Ausdruck, der jedoch der Gefahr einer Missdeutung unterworfen ist.

Anders verhalten sich die bedingt convergenten Reihen.

Es sei, um dies Verhalten darzulegen, A eine Reihe von Zahlen

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, \qquad (A)$$

unter denen unendlich viele sowohl positive als negative vorkommen, und

$$p_0, p_1, p_2, \cdots \qquad (P)$$

seien die positiven,

$$-q_0, -q_1, -q_2, \cdots \qquad (Q)$$

die negativen unter diesen Gliedern, in der Reihenfolge gezählt, wie sie in A auf einander folgen.

Wenn nun die beiden Reihen

$$P = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots,$$
$$Q = q_0 + q_1 + q_2 + \cdots$$

jede für sich convergent ist, so ist

$$A = a_0 + a_1 + a_2 \ldots$$

unbedingt convergent, und es ist

$$A = P - Q.$$

Ist aber von den beiden Reihen P, Q die eine convergent, die andere divergent, so ist A jedenfalls divergent, denn es ist die Summe der $n + 1$ ersten Glieder der Reihe A

$$A_n = P_\mu - Q_\nu,$$

und μ und ν wachsen mit n zugleich ins Unendliche. Wenn aber dann von den beiden Summen P_μ, Q_ν die eine unendlich wird, die andere endlich bleibt, so wird A_n entweder positiv oder negativ unendlich.

Wenn aber P und Q beide divergent sind, so stellt sich A als Differenz zweier unendlicher Zahlen dar, die sehr verschiedener Werthe fähig ist.

Hier gilt der folgende Satz von Dirichlet:

Wenn die Reihen P und Q divergent sind, wenn aber p_n und q_n sich mit unendlichem n der Null nähern, so kann man die Glieder der Reihe A so zu einer Summe verbinden, dass alle a_n für $n < N$ darin vorkommen, und dass sich doch die Summe mit unendlich wachsendem N einer willkürlich gegebenen Grenze K nähert.

Um dies einzusehen, nehme man, wenn K positiv ist, zunächst der Reihe nach so viele Glieder von P, dass ihre Summe P' gerade über K liegt, und also der Unterschied $P' - K$ nicht grösser ist als das zuletzt hinzugefügte p. Dies ist wegen der vorausgesetzten Divergenz von P für jedes K möglich. Nun nehme man wieder der Reihe nach so viele negative Glieder der Reihe Q, dass die Summe $P' - Q'$ gerade unter K liegt, und dass der Unterschied zwischen $P' - Q'$ und K wieder nicht grösser ist, als das zuletzt hinzugefügte q.

Jetzt nehme man wieder, an P' anschliessend, so lange positive Glieder p, dass die Summe $P' - Q' + P''$ wieder gerade über K liegt u. s. f.

Man erhält so eine bestimmte Anordnung der Glieder von A, deren Summe

$$P' - Q' + P'' - Q'' + \cdots$$

über oder unter K liegt, je nachdem zuletzt ein p oder ein $-q$ hinzugefügt ist, und so dass der Unterschied des Werthes dieser Summe von K absolut kleiner ist als das zuletzt hinzugefügte p oder $-q$, und sich daher, wenn man die Summation unbegrenzt fortsetzt, nach der Voraussetzung der Null nähert. Es ist also K als die Summe der unendlichen Reihe

$$(1) \qquad P' - Q' + P'' - Q'' + \cdots$$

zu bezeichnen.

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass auch die Theilsummen P', Q', P'', Q'', ... sich der Grenze Null nähern, und dass man daher den Grenzwerth K auch dann erhält, wenn man bei der Bildung der Summe (1) die zuletzt hinzugefügte Summe $P^{(\nu)}$ oder $Q^{(\nu)}$ nicht ganz erschöpft.

Man kann also in der That (1) als eine Anordnung der Glieder von A betrachten, bei der, wenn man weit genug geht, alle Glieder a_n bis zu einem beliebig gegebenen Rang vorkommen, und deren Summe den Grenzwerth K hat. Die Glieder a_n bilden also bei dieser Anordnung eine convergente Reihe, deren Summe $= K$ ist. Dies ist der Fall der bedingten Convergenz, bei der die Summe durchaus abhängig ist von der Anordnung der Glieder.

Man kann aber auch noch allgemeiner verfahren, indem man zuerst blindlings positive und negative Glieder in beliebiger endlicher Anzahl addirt, und erst dann in der geschilderten Weise planmässig verfährt.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass der Schluss für ein negatives K und für $K = 0$ in nichts Wesentlichem geändert wird.

§. 23.

Beispiel.

Diese Sätze wollen wir nun durch ein einfaches, aber lehrreiches Beispiel veranschaulichen. Die Reihe

$$(1) \qquad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ist, wie wir schon gesehen haben, für $n = \infty$ divergent. Wir können dies aber auch auf dem folgenden Wege einsehen, der uns zugleich Aufschluss giebt, in welcher Weise s_n mit n ins Unendliche wächst. Es ist, wie die unmittelbare Integration erkennen lässt, für jedes positive y

$$(2) \qquad \frac{1}{y} = \int_0^\infty e^{-yx}\, dx$$

und folglich

$$(3) \qquad s_n = \int_0^\infty (e^{-x} + e^{-2x} + \cdots + e^{-nx})\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}\, dx.$$

Ferner erhält man durch Integration von (2) in Bezug auf y zwischen den Grenzen 1 und n, wobei die Vertauschung der Integrationsfolge erlaubt ist:

$$(4) \qquad log\, n = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich

$$(5) \qquad s_n - log\, n = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$- \int_0^\infty e^{-nx}\left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx.$$

Diese Zerlegung ist gestattet, weil die beiden Functionen

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}, \qquad \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x},$$

wie man durch die bekannten Methoden der Differentialrechnung leicht erkennt, für $x = 0$ endlich bleiben und folglich die beiden in (5) vorkommenden Integrale unbedingt convergent sind. Das zweite verschwindet für $n = \infty$, und das erste hat einen bestimmten numerischen Werth:

$$(6) \qquad \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx = C,$$

der sich genähert berechnen lässt und der die Euler'sche Constante genannt wird.

Ihr genäherter Werth ist auf 20 Decimalen [1])

$$C = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,586\,06 \ldots,$$

---

[1]) Bei Gauss (Werke Bd. III, S. 154) ist die Zahl C nach einer Berechnung von Nicolai auf 40 Decimalen angegeben.

und wir erhalten den Satz

(7) $$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=C.$$

Hieraus lassen sich nun andere Resultate über bedingt convergente Reihen herleiten. Trennen wir in s_{2n} die geraden von den ungeraden Gliedern, und setzen

$$U_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$
$$G_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

so ergiebt sich zunächst

(8) $$s_{2n}=G_n+U_n,\qquad s_n=2G_n,$$

(9) $$\lim\left(G_n-\frac{1}{2}\log n\right)=\frac{1}{2}C,$$

(10) $$\lim\,(G_n+U_n-\log 2n)=C,$$

folglich

(11) $$\lim\left(U_n-\log 2-\frac{1}{2}\log n\right)=\frac{1}{2}C.$$

Nehmen wir also zwei ins Unendliche wachsende Zahlen m und n an, so folgt durch Subtraction von (9) und (11)

(12) $$\lim\,(U_n-G_m)=\log 2+\frac{1}{2}\log\frac{n}{m}.$$

Nimmt man z. B. $n=m$, so erhält man die Reihe

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots=\log 2$$

und nimmt man $n=2m$, so folgt

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

und allgemein, wenn man a positive Glieder von U_n, dann b negative Glieder von G_n, dann wieder a positive Glieder von U_n u. s. f. nimmt, so erhält man eine convergente Reihe, deren Summe $\frac{1}{2}\log(4a/b)$ ist, worin $4a/b$ jeden beliebigen rationalen Werth haben kann.

Wir wollen noch einen weiteren Ausdruck für die Constante C ableiten, der bisweilen nützlich ist. Man erhält durch Differentiation nach x

$$d\log(1-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx$$

$$de^{-x}\log x = -e^{-x}\log x\,dx + \frac{e^{-}}{\cdots}$$

und durch Subtraction

$$d\left\{\log(1-e^{-x}) - e^{-x}\log x\right\}$$

$$= e^{-x}\left\{\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right\}dx + e^{-x}\log x$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den
∞, so verschwindet die linke Seite, wie man fü
mittelbar sieht, und für $x = 0$ durch Entwickelur
nach Potenzen von x. Es folgt daher aus (6)

(13) $$\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -C.$$

§. 24.

Ein Satz über Reihenconverge

Es sei $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n \ldots$ eine unbegrenzte R
von denen wir voraussetzen, dass

(1) $$s_n = a_0 + a_1 + a_2 \cdots + a_n$$

mit unendlich wachsendem n innerhalb endlicher
mag sich auch s_n nicht einer bestimmten Gren
sei ferner

(2) $$c_0, c_1, c_2 \ldots$$

eine Reihe positiver, beständig abnehmender unc
nähernder Grössen. Dann gilt allgemein der S
Reihe

(3) $$S_n = a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots$$

convergirt.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachten wir

(4) $$R_{n,m} = a_{n+1}c_{n+1} + a_{n+2}c_{n+2} + \cdots +$$

deren Verschwinden für $n = \infty$ nach §. 20 das I
Convergenz von (3) ist. Hierin setzen wir nach

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$
$$a_{n+2} = s_{n+2} - s_{n+1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{n+m} = s_{n+m} - s_{n+m-1}$$

und erhalten, wenn wir die Glieder anders zusammenfassen

$$R_{n,m} = s_{n+1}(c_{n+1} - c_{n+2}) + s_{n+2}(c_{n+2} - c_{n+3})$$
$$+ \cdots s_{n+m-1}(c_{n+m-1} - c_{n+m}) + s_{n+m}\, c_{n+m} - s_n\, c_{n+1}.$$

Da nun nach unserer Voraussetzung die Differenzen $c_{n+1} - c_{n+2}$, $c_{n+2} - c_{n+3}, \ldots, c_{n+m-1} - c_{n+m}$ positiv und die Summen s_{n+1}, $s_{n+2}, \ldots s_{n+m-1}$ alle absolut kleiner sind als eine endliche Zahl A, so ist der absolute Werth von $R_{n,m}$ kleiner als

$$A\,(c_{n+1} - c_{n+2} + c_{n+2} - c_{n+3} + \cdots + c_{n+m-1} - c_{n+m}$$
$$+ c_{n+m} + c_{n+1}) = 2\,A\,c_{n+1}$$

und nähert sich also nach der Voraussetzung über die c mit unendlich wachsendem n der Grenze Null, wodurch der Satz bewiesen ist.

Nimmt man z. B.

$$a_n = (-1)^n,$$

so ist s_n entweder $= 1$ oder $= 0$ und es folgt also, dass jede Reihe

(5) $$c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \cdots;$$

in der die c eine Reihe positiver, gegen Null abnehmender Grössen sind, convergirt.

Ein anderes Beispiel ist folgendes:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\cos 2x, \quad a_2 = 2\cos 4x, \ldots a_n = 2\cos 2nx,$$

also

(6) $$s_n = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + \cdots + 2\cos 2nx.$$

Um s_n zu finden, multipliciren wir mit $\sin x$ und wenden auf jedes Glied des Productes $s_n \sin x$ die Formel an

$$2\sin x\, \cos 2nx = \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x.$$

Dadurch erhält man

$$s_n \sin x = \sin(2n+1)x$$

oder

(7) $$s_n = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}.$$

Ist also $\sin x$ von Null verschieden, d. h. x nicht gleich einem

Vielfachen von π, so ist, da $\sin(2n+1)x$ immer zwischen -1 und $+1$ liegt, s_n zwischen den endlichen Grenzen

$$\pm \frac{1}{\sin x}$$

eingeschlossen, und wir erhalten also den Satz, dass die Reihe

$$c_0 + 2c_1 \cos 2x + 2c_2 \cos 4x + c_3 \cos 6x + \cdots \tag{8}$$

immer convergent ist, wenn die $c_0, c_1, c_2, \ldots$ eine Reihe positiver gegen Null beständig abnehmender Zahlen ist.

Es ist kaum nöthig, hervorzuheben, dass es genügt, wenn diese Abnahme der Zahlen c_n erst von einer beliebigen endlichen Stelle n an beginnt.

§. 25.

Der Abel'sche Satz über Stetigkeit von Potenzreihen.

Durch das im vorigen Paragraphen angewandte Verfahren der theilweisen Summation kann man auch einen Satz von Abel beweisen, der dem in §. 9 bewiesenen Satz über die Stetigkeit eines Integrals analog ist. Er lautet so:

Wenn die Reihe

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

bedingt oder unbedingt convergirt, so ist A der Grenzwerth, dem sich die für $r < 1$ durch die Reihe

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots \tag{2}$$

definirte Function nähert, wenn r sich der Grenze 1 nähert. In Zeichen:

$$\lim_{r=1} (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots) = A. \tag{3}$$

Dass die Reihe (2) für jedes echt gebrochene r unbedingt convergirt, folgt aus §. 21, I., III.

Die Reihe (2) formen wir nun um, indem wir

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

also $a_n = s_n - s_{n-1}$ setzen, und erhalten wie im vorigen Paragraphen

$$\begin{aligned} f(r) &= s_0 + (s_1 - s_0) r + (s_2 - s_1) r^2 + (s_3 - s_2) r^3 + \cdots \\ &= (1 - r)(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + s_3 r^3 + \cdots), \end{aligned} \tag{4}$$

und wenn wir die letzte Reihe in zwei Theile theilen

$$f(r) = (1-r)(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots + s_n r^n)$$
$$+ (1-r)(s_{n+1} r^{n+1} + s_{n+2} r^{n+2} + \cdots).$$

Bedeutet P einen zwischen dem grössten und kleinsten Werthe der Summen $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ gelegenen Werth, so ist

$$s_{n+1} r^{n+1} + s_{n+2} r^{n+2} + \cdots = P\,(r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots)$$
$$= P\,\frac{r^{n+1}}{1-r}$$

und folglich

$$(5)\quad f(r) = (1-r)(s_0 + s_1 r + s_2 r^2 + \cdots + s_n r^n) + P r^{n+1}.$$

Hiervon subtrahiren wir die identische Gleichung

$$A = A(1-r)(1 + r + r^2 + \cdots + r^n) + A r^{n+1}$$

und erhalten

$$(6)\qquad f(r) - A = (1-r)\,F_n(r) + (P-A)\,r^{n+1},$$

worin die linke Seite von n unabhängig und

$$F_n(r) = (s_0 - A) + (s_1 - A)\,r + \cdots + (s_n - A)\,r^n$$

eine ganze Function n^{ten} Grades von r ist.

Es ist nun zu beweisen, dass sich, wenn eine beliebig kleine positive Zahl ω gegeben ist, die Zahl ϱ so klein annehmen lässt, dass $f(r) - A$ dem absoluten Werthe nach kleiner wird als ω, wenn $1 - r < \varrho$ ist.

Man kann aber n so gross annehmen, dass $s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots$ dem Werthe A beliebig nahe kommen, und folglich so, dass $P - A$ und mithin auch $(P-A)\,r^{n+1}$ dem absoluten Werthe nach kleiner als $^1/_2\,\omega$ ist. Ist n bestimmt, so kann man wieder ϱ so klein annehmen, dass auch $(1-r)\,F_n(r)$ kleiner als $^1/_2\,\omega$ wird, und dann ist nach (6) der absolute Werth von $f(r) - A$ kleiner als ω [1]).

§. 26.

Halbconvergente Reihen.

Obwohl man bei divergenten Reihen von einer Summe nicht sprechen kann, so können solche Reihen doch bisweilen mit

[1]) Dieser Satz rührt von Abel her, der ihn in seinen Untersuchungen über die Binomialreihe benutzt hat. Ein Beweis, der sich übrigens ganz ähnlich schon bei Abel findet, ist nach einer Mittheilung Dirichlet's von Liouville veröffentlicht (Dirichlet's Werke, Bd. 2, S. 305).

Nutzen gebraucht werden zur Berechnung transcendenter Functionen. Um den Sinn dieses Ausspruches zu verstehen, betrachten wir eine Reihe von Grössen $u_0, u_1, u_2, \dots u_n$ von der Art, dass

$$(1) \qquad U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

mit n zugleich ins Unendliche wächst. Man kann sich nun die Frage stellen, wenn es sich um die Darstellung eines bestimmten Werthes A handelt, für welchen Werth von n wird U_n dem Werthe A möglichst nahe kommen, und auf welchen Grad der Kleinheit kann die Differenz $A - U_n$ heruntergebracht werden? Ist diese Differenz klein genug, so wird man U_n als eine angenäherte Darstellung der Zahl A betrachten können. In den Anwendungen verhält sich meistens die Sache so, dass die Reihenglieder $u_0, u_1, u_2, \dots$ Functionen einer Variablen x sind, so dass

$$(2) \qquad U_n = \Phi(x, n)$$

eine Function von x und n wird. An die Stelle von A tritt alsdann gleichfalls eine Function, $F(x)$, und es handelt sich darum, die Differenz

$$(3) \qquad F(x) - \Phi(x, n) = \Delta(x, n)$$

so klein als möglich zu machen. Das hier zu wählende n wird dann von x abhängen, und es ist ein häufig vorkommender Fall der, dass man $\Delta(x, n)$ um so kleiner machen kann, je grösser x ist, wobei dann auch n in bestimmter Weise mit x wachsen kann. Wenn z. B. $\Phi(x, n)$ die Eigenschaft hat, dass für jedes n

$$(4) \qquad \lim_{x=\infty} x^n [F(x) - \Phi(x, n)] = 0$$

ist, so heisst $\Phi(x, n)$ (nach Poincaré) eine asymptotische Darstellung der Function $F(x)$.

Wir wollen diese allgemeinen Grundsätze an einem einfachen Beispiel erläutern.

Wir definiren eine später noch nützliche Function

$$(5) \qquad \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Nach §. 12 hat diese Function die Eigenschaften

$$(6) \qquad \Theta(0) = 0, \quad \Theta(\infty) = 1.$$

$$\Theta(-x) = -\Theta(x). \tag{7}$$

Es genügt also, $\Theta(x)$ für positive Werthe von x zu berechnen. Ein geschlossener Ausdruck lässt sich für diese Function nicht angeben, wohl aber eine stets convergente Reihe. Es ist nämlich, wenn man für $e^{-\alpha^2}$ die Reihe setzt:

$$e^{-\alpha^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{1!} + \frac{\alpha^4}{2!} - \frac{\alpha^6}{3!} + \cdots, \tag{8}$$

in der

$$n! = 1.2.3 \ldots n \tag{9}$$

ist, und dann integrirt,

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{\nu!\,(2\nu+1)}, \tag{10}$$

und diese Reihe convergirt stärker wie die Reihe (8), die bekanntlich für alle Werthe von α convergirt.

Nach (10) ist $\Theta(x)$ für kleine Werthe von x zu berechnen.

Für grosse Werthe von x ist aber die Convergenz dieser Reihe zu langsam. Für solche Werthe kommt man leichter durch eine halbconvergente Entwickelung zum Ziele. Um diese abzuleiten, setzen wir nach (6)

$$\Theta(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\alpha^2}\, d\alpha \tag{11}$$

und substituiren für α eine neue Variable β durch die Gleichung

$$\alpha = \frac{\beta}{2x} + x, \quad d\alpha = \frac{d\beta}{2x};$$

dadurch erhält man

$$\int_x^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{e^{-x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{4x^2}} e^{-\beta}\, d\beta. \tag{12}$$

Nun können wir nach dem Taylor'schen Lehrsatz, wenn ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet,

$$e^{-x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{x^\nu}{\nu!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} e^{-\vartheta x}$$

setzen, und folglich, da $e^{-\vartheta x}$ für positive x gleichfalls ein echter Bruch ist:

$$(13) \qquad e^{-\frac{\beta^2}{4x^2}} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu \beta^{2\nu}}{(2x)^{2\nu}\, \nu!},$$

mit der Maassgabe, dass diese Formel nur dann genau ist, wenn das letzte Glied auf einen Bruchtheil seines Werthes reducirt wird.

Nun ist nach einer bekannten Formel, die sich durch partielle Integration leicht beweisen lässt:

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\, \beta^n\, d\beta = n!,$$

und wenn man also die Entwickelung (13) in das Integral (12) einsetzt, so folgt

$$(14) \qquad \int_x^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{\nu!\,(2x)^{2\nu+1}}$$

und diese Formel ist gleichfalls nur unter der Voraussetzung exact, dass das letzte Glied auf einen Bruchtheil seines Werthes reducirt wird. Um also zu beurtheilen, was uns diese Formel leisten kann, müssen wir die Grösse des allgemeinen Gliedes der Entwickelung (13) abschätzen. Zu diesem Zweck machen wir von der bekannten Formel Gebrauch[1])

$$n! = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\vartheta}{12n}},$$

wo ϑ ein positiver echter Bruch ist, aus der, wenn ϑ' gleichfalls ein positiver echter Bruch ist, folgt

$$(2n)! = \sqrt{2\pi}\, e^{-2n} (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\vartheta'}{24n}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$(15) \qquad \frac{(2n)!}{n!\,(2x)^{2n}} = e^{-n} \left(\frac{n}{x^2}\right)^n \sqrt{2}\, e^{\frac{\vartheta''}{24n}},$$

worin $\vartheta'' = \vartheta' - 2\vartheta$ der Bedingung $-2 < \vartheta'' < 1$ genügt.

[1]) Vergl. z. B. Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von Serret, deutsch von Harnack und Bohlmann, Bd. 2, S. 166 der 2. Aufl.

Hieraus ergiebt sich nun Folgendes:

Wenn n bei feststehenden x ins Unendliche wächst, so wächst auch dieser Ausdruck ins Unendliche und die Reihe (14) ist folglich divergent.

Wenn aber $x^2 > n$, also n/x^2 ein echter Bruch ist, so ist, da $e^{\frac{\vartheta''}{24n}}$ bei grossen n nahe gleich 1 ist, der Fehler, den man bei Benutzung der Formel (14) begeht, kleiner als

$$e^{-x^2} e^{-n} \frac{1}{x\sqrt{2}}.$$

Behält man n bei, und lässt x wachsen, so wird die Genauigkeit der Formel (14) um so grösser, je grösser x wird, und die Formel (14) giebt eine asymptotische Darstellung des Integrals.

Die Function $\Theta(x)$ kommt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor, und man hat darum ihre numerischen Werthe in Tabellen zusammengestellt. Eine solche Tabelle findet man in dem Buche: Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber, Leipzig 1891. Nach dieser Tabelle ist $\Theta(x)$ schon bei $x = 4{,}8$ in der 11ten Decimalen von 1 nicht mehr zu unterscheiden.

Vierter Abschnitt.

Fourier'sche Reihen.

---

§. 27.

Gleichmässige und ungleichmässige Convergenz.

Wir betrachten nun solche Reihen, deren Coëfficienten Functionen einer Veränderlichen x sind. Es sei also

(1) $$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

eine Reihe von Functionen von x, die in irgend einem Intervall (a, b) endlich und stetig sind, die dem absoluten Werthe nach auch für ein unendlich wachsendes n nicht über eine endliche Grösse hinausgehen. Wenn die Reihe

(2) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

convergirt, so wird auch

(3) $$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

convergent sein, und sich mit unendlich wachsenden n der Grenze Null nähern.

Wenn nun diese Convergenz für jeden Werth x des Intervalls (a, b) stattfindet, so giebt es, wenn ω eine gegebene, beliebig kleine positive Grösse ist, für jedes x einen Werth N von der Art, dass, wenn $n > N$ ist

(4) $$-\omega < R_n < +\omega$$

und es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die Grössen N haben im Intervall (a, b) eine endliche obere Grenze N_0 (die natürlich eine von x unabhängige Zahl ist), und dann gilt die Ungleichung (4) für das

ganze Intervall, sobald $n > N_0$ ist. In diesem Falle nennt man die Reihe U in dem Intervalle gleichmässig convergent.

2. Die Zahlen N haben im Intervall bei hinlänglich kleinen ω keine obere Grenze, sondern wachsen über alle Grenzen, etwa so, dass N mit der Annäherung von x an gewisse besondere Werthe unendlich wachsen muss, ohne dass darum die Existenz eines bestimmten N für jedes individuelle x aufhört. Diese Art der Convergenz heisst ungleichmässig.

Bei der ungleichmässigen Convergenz verhält es sich so, dass die Convergenz bei der Annäherung an einen bestimmten Punkt, etwa an α, immer schlechter wird, in α selbst aber durch irgend einen anderen Umstand, indem z. B. hier alle u_ν einen verschwindenden Factor bekommen, wieder hergestellt wird.

Eine Reihe von gleichmässiger Convergenz können wir auf folgende Art bilden. Es sei

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

eine convergente Reihe von positiven numerischen Gliedern und

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \cdots$$

eine Reihe von Functionen von x, deren Werthe in endlichen Grenzen eingeschlossen sind. Dann ist die Reihe

$$\Phi = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots \tag{5}$$

gleichmässig convergent, soweit die Functionen φ_ν die gemachten Voraussetzungen erfüllen. Denn hier ist, wenn die φ_ν dem absoluten Werth nach unter C liegen

$$R_n = c_{n+1}\varphi_{n+1} + c_{n+2}\varphi_{n+2} + \cdots < C\,(c_{n+1} + c_{n+2} + \cdots),$$

was durch ein von x unabhängiges n beliebig klein gemacht werden kann.

§. 28.

Beispiel.

Zur Erläuterung des Begriffes der ungleichmässigen Convergenz wollen wir ein Beispiel betrachten.

Wir haben im §. 24 eine Summenformel gefunden, nämlich, wenn wir $2x = \alpha$ setzen:

$$(1)\quad 1 + 2\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cdots + 2\cos n\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

worin n eine ganze Zahl ist. Wir multipliciren diesen Ausdruck mit $d\alpha$ und integriren ihn zwischen den Grenzen 0 und x, worin x eine zwischen 0 und 2π gelegene Veränderliche sei. Wir finden dann

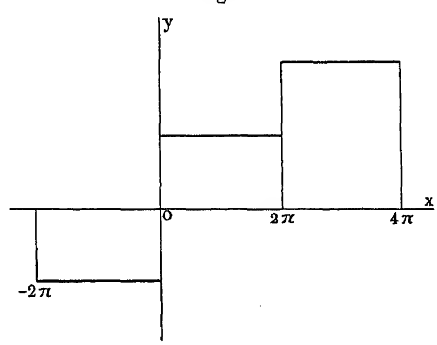
$$(2)\quad x + 2\sin x + \frac{2\sin 2x}{2} + \frac{2\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{2\sin nx}{n} = \int_0^x \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha,$$

und darin lässt sich nun der Grenzübergang zu unendlichem n nach der Formel IV. (§. 15) bewerkstelligen, wenn man $\psi(x) = x/\sin{}^1/_2 x$ setzt. Man findet so die Summe der unendlichen Reihe

$$(3)\quad x + 2\sin x + 2\,\frac{\sin 2x}{2} + 2\,\frac{\sin 3x}{3} + \cdots = \pi.$$

Diese Formel gilt, so lange $0 < x < 2\pi$ ist. Die linke Seite verschwindet aber für $x = 0$, und erhält für negative

Fig. 3.



Werthe von x den entgegengesetzten Werth wie für die gleichen positiven. Die Function

$$(4)\quad \Phi(x) = x + 2\sin x + 2\,\frac{\sin 2x}{2} + 2\,\frac{\sin 3x}{3} + \cdots$$

genügt ausserdem der Bedingung

$$\Phi(x + 2\pi) = \Phi(x) + 2\pi$$

und wird durch das in Fig. 3 dargestellte, aus Stücken paralleler gerader Linien zusammengesetzte Diagramm veranschaulicht. Sie hat für jedes x einen bestimmten Werth und ist eine unstetige Function von x.

Trotzdem gilt aber der folgende Satz:

Die Reihe $\Phi(x)$ ist in dem Intervalle (ε, π) gleichmässig convergent, wenn $0 < \varepsilon < \pi$.

Um dies einzusehen, bilden wir den Rest,

$$(5) \qquad R_n = 2\,\frac{\sin(n+1)x}{n+1} + 2\,\frac{\sin(n+2)x}{n+2} + \cdots,$$

welcher in Folge von (2) und (3) den Werth hat:

$$(6) \qquad R_n = \pi - \int\limits_0^x \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha.$$

Diesen Ausdruck bringen wir, indem wir zur Abkürzung

$$n + \frac{1}{2} = \mu$$

setzen, in die Form

$$(7) \qquad R_n = \pi - \int\limits_0^\varepsilon \frac{\sin\mu\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha - \int\limits_\varepsilon^x \frac{\sin\mu\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha,$$

und nach dem zweiten Mittelwerthsatz ist, wenn ξ einen Werth zwischen ε und x bedeutet:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \int\limits_\varepsilon^x \frac{\sin\mu\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha &= \frac{\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\int\limits_\varepsilon^\xi \frac{\sin\mu\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}\int\limits_\xi^x \frac{\sin\mu\alpha}{\alpha}\,d\alpha \\ &= \frac{\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}\int\limits_{\mu\varepsilon}^{\mu\xi} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha + \frac{x}{\sin\frac{1}{2}x}\int\limits_{\mu\xi}^{\mu x} \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha, \end{aligned}$$

nun ist für jedes positive x, was kleiner als π ist:

$$2 < \frac{x}{\sin \frac{1}{2} x} < \pi,$$

und wegen der Convergenz des Integrals $\int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$ ist das Integral $\int\limits_a^b \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$ absolut genommen kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω, wenn a und b beide grösser sind als eine hinlänglich grosse Zahl c. Hieraus ersieht man, dass man μ von x unabhängig, so gross annehmen kann, dass das Integral (8) beliebig klein wird.

Da ferner

$$\lim_{\mu = \infty} \left(\pi - \int\limits_0^\varepsilon \frac{\sin \mu \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} d\alpha \right) = 0$$

ist, und x in diesem Ausdruck überhaupt nicht vorkommt, so kann man auch noch μ so gross annehmen, dass diese Differenz und damit der ganze Ausdruck R_n beliebig klein wird, worin die gleichmässige Convergenz liegt.

Dieselbe Betrachtung lässt sich auch auf das Intervall von π bis $2\pi - \varepsilon$ anwenden, und daraus folgt, dass die Reihe $\Phi(x)$ in einem Intervall (a, b), worin

$$0 < a < x < b < 2\pi,$$

gleichmässig convergirt.

Die gleichmässige Convergenz hört aber auf, wenn das Intervall für x bis 0 oder bis 2π ausgedehnt wird.

Denn machen wir in (6) die Substitution

$$\frac{2n+1}{2} \alpha = \beta,$$

so erhalten wir:

$$R_n = \pi - \int\limits_0^{\frac{2n+1}{2} x} \frac{2\beta}{(2n+1) \sin \frac{\beta}{2n+1}} \frac{\sin \beta}{\beta} d\beta,$$

und hierin kann man, wie gross auch n sein mag, x immer

klein annehmen, dass das Integral beliebig klein und R_n also nicht verschwindend klein wird. Gleichwohl hört die Convergenz der Reihe $\Phi(x)$ im Punkte $x = 0$ selber nicht auf, weil dort alle Glieder einzeln verschwinden.

§. 29.

Stetigkeit, Integration und Differentiation unendlicher Reihen.

1. Eine gleichmässig convergente Reihe, deren Glieder stetige Functionen einer Variablen x sind, ist selbst eine stetige Function von x.

Es sei nämlich

(1) $$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

eine in irgend einem Intervall gleichmässig convergente Reihe.

Man setze

(2) $$\begin{gathered} U = U_n + R_n \\ R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots \end{gathered}$$

Nimmt man n so gross, dass R_n in dem ganzen Intervall kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω wird, so sind auch die Schwankungen von R_n unter dieser Grenze, und da U_n eine stetige Function von x ist, so kann man die Veränderung von x so klein machen, dass auch die Schwankungen von U_n kleiner als eine beliebig kleine Grösse ω' werden. Dann sind die Schwankungen von U kleiner als $\omega + \omega'$, w. z. b. w.

Es seien jetzt a und x zwei Punkte des Intervalls, in dem die Reihe U gleichmässig convergirt und es werde

(3) $$v_0 = \int_a^x u_0\,dx, \quad v_1 = \int_a^x u_1\,dx, \quad v_2 = \int_a^x u_2\,dx, \ldots$$

gesetzt. Dann ergiebt sich aus der Zerlegung (2) sofort

(4) $$V = \int_a^x U\,dx = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

d. h. man kann eine gleichmässig convergente Reihe dadurch integriren, dass man jedes einzelne ihrer Glieder integrirt. Wenn aber die gleichmässige Convergenz oder die Convergenz über-

haupt für die Reihe U in einzelnen Punkten aufhört, während die gleichmässige Convergenz der Reihe V über diesen Punkt hinaus fortbesteht, so ergiebt sich, da das Integral immer eine stetige Function seiner oberen Grenze ist, mit Hülfe des Satzes 1., dass die Formel (4) auch dann noch richtig ist, wenn x in einen solchen Punkt fällt, oder über ihn hinausgeht. Wir haben also den Satz:

2. Eine Reihe U, die, von einzelnen Punkten abgesehen, gleichmässig convergirt, lässt sich durch Integration ihrer einzelnen Glieder integriren, wenn die durch Integration entstandene Reihe gleichmässig convergirt.

Aus diesem Satze lässt sich leicht ein entsprechender Satz über die Differentiation einer Reihe ableiten.

3. Wenn $v_0, v_1, v_2, \ldots$ stetige Functionen von x sind, und

$$V = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{5}$$

convergirt, wenn ferner die Reihe

$$\frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_1}{dx} + \frac{dv_2}{dx} + \cdots$$

in einem beliebig kleinen den Werth x enthaltenden Intervall gleichmässig convergirt, so ist

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dv_0}{dx} + \frac{dv_1}{dx} + \frac{dv_2}{dx} + \cdots. \tag{6}$$

Dies ergiebt sich, wenn man die Reihe (6) nach dem Satze 2. integrirt.

§. 30.

Beispiel.

Wir haben die Reihensumme gefunden:

$$\pi - x = 2\sin x + 2\,\frac{\sin 2x}{2} + 2\,\frac{\sin 3x}{3} + \cdots, \tag{1}$$

die in dem Intervall $0 < x < 2\pi$ gültig und in dem Intervall (a, b) §. 28 gleichmässig convergent ist. Da durch Integration dieser Reihe eine unbedingt und gleichmässig convergirende Reihe entsteht, so ist die Integration von 0 bis x ge-

stattet, und wir erhalten eine bis $x = 2\pi$ einschliesslich gültige Formel

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} = -\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 3x}{9} - \frac{\cos 4x}{16} - \cdots \\ + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots \end{aligned}$$

Setzen wir hierin $x = \pi$, so ergiebt sich

$$(3)\qquad \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots,$$

und nun können wir auch die in der zweiten Zeile der Formel (2) stehende convergente numerische Reihe summiren. Setzen wir, um dies auszuführen

$$z = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

so ergiebt sich mit Hülfe von (3)

$$\begin{aligned} z - \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \cdots \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots\right) = \frac{z}{4}, \end{aligned}$$

woraus sich $z = \pi^2/6$, also

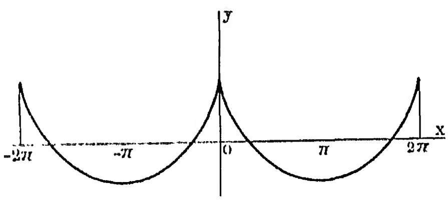
$$(4)\qquad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

ergiebt. Demnach finden wir aus (2) die folgende Reihensumme:

$$(5)\qquad \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{4} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 4x}{16} + \cdots = \frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

gültig in dem Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$.

Fig. 4.



Die Reihe auf der linken Seite dieser Formel ist eine gerade periodische Function mit der Periode 2π. Sie kann durch eine stetige Curve dargestellt werden, die sich aus lauter symmetrischen Parabelbögen zusammensetzt.

Man kann aus (5) verschiedene andere Formeln ableiten, von denen einige angeführt sein mögen.

Ersetzt man in (5) x durch $x + \pi$, so erhält man

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n x}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12},$$

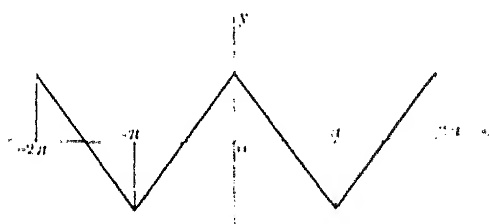
eine Formel, die in dem Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ gilt.

Wenn wir dann (6) von (5) subtrahiren, so folgt für das Intervall $0 \gtreqless x \gtreqless \pi$

$$(7) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Die Functionen, die auf der linken Seite von (6) und (7) stehen, werden durch gebrochene, aber stetig zusammenhängende

Fig. 5.



Linien dargestellt, die bei (6) aus Parabelbögen, bei (7) aus geradlinigen Strecken zusammengesetzt sind, wie die Fig. 4 und 5 zeigen.

§. 31.

Fourier'sche Reihen.

Die nach **Fourier** benannten Reihen haben den Zweck, eine gegebene Function $\varphi(x)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach sinus und cosinus der Vielfachen des Arguments x fortschreitet, und die also die Form hat

$$\text{I.} \qquad \varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots,$$

worin die $a_1, a_2, a_3, \dots b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ von x unabhängige Coëfficienten sind. Solche Reihen nennen wir auch **trigonometrische Reihen**. Setzen wir die Convergenz dieser Reihe

voraus, so ändert sie wegen der Periodicität der Functionen $\sin x$, $\cos x$ ihren Werth nicht, wenn x um 2π vermehrt wird, und demnach kann die Function $\varphi(x)$ höchstens in einem Intervall von der Grösse 2π willkürlich sein. Darüber hinaus wiederholen sich ihre Werthe periodisch.

Innerhalb eines solchen Intervalls mag nun die Function $\varphi(x)$ beliebig gegeben sein. Sie soll sich auch aus Theilen zusammensetzen können, die in verschiedenen Stücken des Intervalls verschiedenen analytischen Gesetzen folgen, auch kann sie Unstetigkeiten haben; nur soll sie den Bedingungen des Satzes §. 16, V. unterworfen sein.

Wenn wir voraussetzen, dass die Reihe I. nach §. 29 gliedweise integrirbar ist, so lassen sich die Coëfficienten leicht durch Integrale ausdrücken. Wir haben nämlich, wenn m und n beliebige ganze Zahlen sind, die wir nicht negativ anzunehmen brauchen, weil $\sin mx \cos nx$ eine ungerade Function ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0;$$

ferner:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m-n)x \, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m+n)x \, dx = 0, \quad \text{wenn } m \gtrless n$$

$$= \pi, \quad \text{wenn } m = n > 0$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m-n)x \, dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(m+n)x \, dx = 0, \quad \text{wenn } m \gtrless n$$

$$= \pi, \quad \text{wenn } m = n > 0$$

$$= 2\pi, \quad \text{wenn } m = n = 0.$$

Wenn wir hiernach die Reihe I. mit $\sin mx\,dx$ und mit $\cos mx\,dx$ multipliciren und zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ integriren, so erhalten wir

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\sin m x\, dx,\\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\cos m x\, dx,
\end{aligned}
$$

von denen die letzte auch noch für $m = 0$ gilt.

Hieraus ergiebt sich also, dass die Darstellung einer Function $\varphi(x)$ durch die Formel I. höchstens auf eine Art möglich ist, wenn wir verlangen, dass die Reihe gliedweise integrirbar sein soll[1]).

Setzen wir die oben angegebene Periodicität der Function $\varphi(x)$ voraus, so können wir, wenn c ein beliebiger Werth ist, auch setzen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{c-\pi}^{c+\pi} \varphi(x)\sin m x\, dx,\\
b_m &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{c-\pi}^{c+\pi} \varphi(x)\cos m x\, dx.
\end{aligned}
$$

Denn es ist nach dieser Voraussetzung z. B.

$$
\int\limits_{\pi}^{c+\pi} \varphi(x)\sin m x\, dx = \int\limits_{-\pi}^{c-\pi} \varphi(x)\sin m x\, dx,
$$

wie man durch die Substitution $x = 2\pi + x_1$ erkennt, und hierdurch werden die beiden Ausdrücke von a_m auf einander zurückgeführt. Ebenso b_m.

§. 32.

Summation der trigonometrischen Reihe.

Um aber zu zeigen, dass jede Function $\varphi(x)$, die den angegebenen Forderungen genügt, in eine trigonometrische Reihe entwickelbar ist, müssen wir nach Dirichlet's Vorgang die

---

[1]) Dass auch ohne diese Forderung eine zweite Entwickelung einer Function in eine trigonometrische Reihe nicht möglich ist, hat G. Cantor bewiesen (Crelle's Journ., Bd. 72).

Summe der n ersten Glieder der Reihe bilden, und dann n ins Unendliche wachsen lassen. Wenn sich dann zeigt, dass die Summe dem Grenzwerth $\varphi(x)$ zustrebt, dann ist die Entwickelbarkeit erwiesen. Setzen wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} S_n = {} & a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx \\ & + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx \end{aligned}$$

und substituiren für die Coëfficienten a_m, b_m die Ausdrücke §. 31 (2), in denen wir die Integrationsvariable mit α bezeichnen, so ergiebt sich:

$$(2)\qquad \begin{aligned} S_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{c-\pi}^{c+\pi} \varphi(\alpha) \Big\{ \frac{1}{2} + \cos(x-\alpha) + \cos 2(x-\alpha) + \cdots \\ + \cos n(x-\alpha) \Big\} d\alpha \end{aligned}$$

und durch Anwendung der Summenformel §. 28, (1):

$$(3)\qquad S_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c-\pi}^{c+\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin \frac{1}{2}(x-\alpha)} d\alpha,$$

oder, wenn man unter dem Integralzeichen $\alpha = x + \beta$ setzt:

$$(4)\qquad S_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{c-\pi-x}^{c+\pi-x} \varphi(x+\beta) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta} d\beta.$$

Wählt man c so, dass

$$-\pi + x < c < \pi + x,$$

z. B. $c = x$, so sind die beiden Grenzen des Integrals (4) von verschiedenen Vorzeichen und liegen zwischen -2π und $+2\pi$, und demnach können wir den Grenzwerth von S_n nach dem Theorem §. 16, V. bestimmen, wenn wir darin

$$\psi(\beta) = \varphi(x+\beta) \frac{\beta}{\sin \frac{1}{2}\beta}$$

setzen, und wir finden so:

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2}\,\varphi\,[(x+0) + \varphi\,(x-0)],$$

oder also, wenn $\varphi(x)$ an der Stelle x stetig ist, $= \varphi(x)$:

Die Fourier'sche Formel I. mit den Bestimmungen (1) oder (2) §. 31 gilt also, wenn die Function $\varphi(x)$ in einem Intervall vom Umfang 2π den Bedingungen §. 16, V. gemäss beliebig gegeben ist, wenn sie periodisch ist mit der Periode 2π, und wenn sie an einer Unstetigkeitsstelle den Mittelwerth der beiden dort zusammenstossenden Werthe hat.

§. 33.

Besondere Formen der Fourier'schen Reihe.

Wenn man in der Darstellung §. 32 (2) von der Formel Gebrauch macht

$$2\cos n\,(x-\alpha) = e^{n i (x-\alpha)} + e^{-n i (x-\alpha)},$$

so kann man der nun bewiesenen Fourier'schen Darstellung der Function $\varphi(x)$ die Form geben

$$\mathrm{I}^{a}. \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n}^{-\infty,\,\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\alpha)\,e^{n i (x-\alpha)}\,d\alpha$$

oder, indem man x und α durch πx und $\pi\alpha$ und $\varphi(\pi x)$ durch $\varphi(x)$ ersetzt:

$$\mathrm{I}^{b}. \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n}^{-\infty,\,\infty}\int_{-1}^{+1}\varphi(\alpha)\,e^{n\pi i (x-\alpha)}\,d\alpha,$$

wo aber in der letzten Formel die Periode der Function $\varphi(x)$ nicht mehr 2π, sondern 2 ist.

Wir haben ferner hier, ähnlich wie bei den Fourier'schen Integralen, die beiden speciellen Fälle hervorzuheben, dass $\varphi(x)$ eine gerade oder eine ungerade Function ist, d. h., dass $\varphi(-x) = +\varphi(x)$ oder $= -\varphi(x)$ ist.

Ist zunächst $\varphi(x)$ ungerade, so ist nach §. 31, (1)

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \sin m x \, d x = 2 \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin m x \, d x$$

$$\pi b_m = \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x) \cos m x \, d x = 0,$$

und ebenso ergiebt sich, wenn $\varphi(x)$ gerade ist, $a_m = 0$.

Man erhält auf diese Weise

$$\text{II.} \qquad \varphi(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2 x + a_3 \sin 3 x + \cdots$$

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin m x \, d x$$

$$\text{III.} \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2 x + b_3 \cos 3 x + \cdots$$

$$b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos m x \, d x.$$

Hier können die Functionen $\varphi(x)$ in dem Intervall $(0, \pi)$ beliebig gegeben sein. Es kann auch z. B. in beiden Formeln $\varphi(x)$ dieselbe Function darstellen. Ueber dieses Intervall setzt sich die Reihe im ersten Falle als ungerade, im zweiten als gerade, und in beiden Fällen als periodische Function von x fort. Die Formel II. giebt $\varphi(0) = 0$, und wenn also $\varphi(+0)$ nicht $= 0$ ist, so ist die Reihe II. bei $x = 0$ unstetig. Die Reihe III. ergiebt $\varphi(-0) = \varphi(+0)$, also Stetigkeit bei $x = 0$.

Will man eine Function entwickeln, die anstatt der Periode 2π eine beliebige andere Periode $2l$ hat, so kann man in der Formel §. 31, I. $\pi x / l$ an Stelle von x und dann wieder $\varphi(x)$ statt $\varphi(\pi x / l)$ setzen. Dann findet man

$$\text{IV.} \qquad \varphi(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin 2 \frac{\pi x}{l} + a_3 \sin 3 \frac{\pi x}{l} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_2 \cos 2 \frac{\pi x}{l} + b_3 \cos 3 \frac{\pi x}{l} + \cdots,$$

und darin ist, wenn c eine beliebige Grösse bedeutet, nach §. 31, (2):

$$a_m = \frac{1}{2}\int\limits_{c-l}^{c+l} \varphi(x) \sin m \frac{\pi x}{l}\, dx$$

$$b_m = \frac{1}{2}\int\limits_{c-l}^{c+l} \varphi(x) \cos m \frac{\pi x}{l}\, dx.$$

Auch hier lassen sich dann die beiden speciellen Fälle II., III. hervorheben.

§. 34.

Beispiele.

Als Beispiel wollen wir die Function $\varphi(x)$ betrachten, die in dem Intervall $(0, \pi)$ gleich x ist. Wenn wir diese Function als gerade Function fortsetzen, so bleibt sie auch bei perio-

Fig. 6.

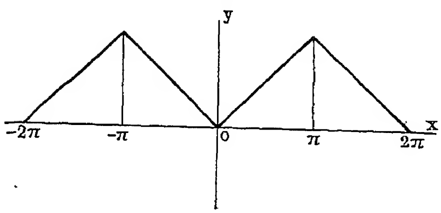
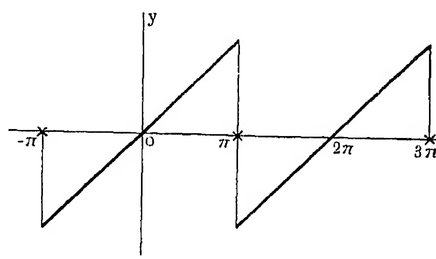


Fig. 7.



discher Fortsetzung stetig. Wenn sie aber als ungerade Function fortgesetzt wird, so wird sie bei den ungeraden Vielfachen von π unstetig.

Wir wenden also jetzt II. und III. an, und erhalten aus den Formeln

$$d\,(x \cos mx) = dx\,(\cos mx - mx \sin mx),$$
$$d\,(x \sin mx) = dx\,(\sin mx + mx \cos mx)$$

durch Integration

$$\int\limits_0^\pi x \sin mx\, dx = -\frac{\pi \cos m\pi}{m},$$

$$\int\limits_0^\pi x \cos mx\, dx = \frac{\cos m\pi - 1}{m^2}$$

und für $m = 0$

$$\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Da nun $\cos m\pi = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem m gerade oder ungerade ist, so ergeben die Formeln II., III. die für das Intervall $(0, \pi)$ gültigen Entwickelungen

$$(1) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots$$

$$(2) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Diese Reihen sind im Grunde nur andere Formen der Entwickelungen §. 30 (1) und (7).

Man kann daraus mannigfache Summenformeln ableiten, von denen folgende Beispiele angeführt sein mögen: Setzt man $x = {}^1\!/_2\,\pi$, so erhält man aus (1) die Leibnitz'sche Reihe

$$(3) \qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Setzt man aber in (1) $x = {}^1\!/_4\,\pi$, so folgt

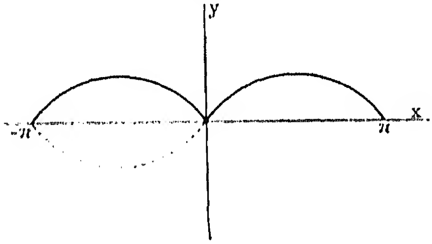
$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7\sqrt{2}} - \cdots,$$

und hieraus mit Benutzung von (3)

$$(4) \qquad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots.$$

Um noch ein anderes Beispiel zu geben, wollen wir die Function $\sin x$ in eine Cosinus-Reihe entwickeln. Tragen wir den Werth der Reihe auch über das Intervall $(0, \pi)$ als Ordinate einer Curve auf, so erhalten wir, wie Fig. 8 zeigt, eine aus Bögen der Sinus-Linie zusammengesetzte Curve, die ganz auf der positiven Seite der x-Axe verläuft. Die Curve ist zwar stetig, hat aber bei den Vielfachen von π Ecken. Wenden wir also die Formel III. an, so ergiebt sich

Fig. 8.



$$(5)\quad b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos mx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(m+1)x - \sin(m-1)x \ldots$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(m+1)\pi - 1}{m+1} - \frac{\cos(m \ldots}{m \ldots}\right.$$

und für $m = 0, 1$

$$(6)\qquad b_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{4}{\pi},\quad b_1 \ldots$$

Aus (3) folgt

$$b_1 = 0,\quad b_3 = 0, \ldots$$

$$b_{2m} = -\frac{4}{\pi(4m^2 - 1)} = \frac{\ldots}{\pi(2m \ldots} - \frac{1}{\ldots}$$

Wir erhalten also die zwischen 0 und π …

$$(7)\qquad \frac{\pi}{2}\sin x = 1 - \frac{2\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{2\cos 4x}{3\cdot 5} \ldots$$

§. 35.

Grad der Convergenz der Fourier'…

Es ist nun noch von Interesse, dass m… Grad der Abnahme der Coefficienten a_m, b_m … schon Reihen mit unendlich wachsendem … bilden kann. Wir setzen dabei die Differentia… tion $\varphi(x)$ voraus, ohne auszuschliessen, da… quotient in einem Punkte unendlich wird. … selbst wollen wir als endlich voraussetzen. …

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{d\,\varphi(x)\cos nx}{dx} &= \varphi'(x)\cos nx - n\varphi\ldots \\ \frac{d\,\varphi(x)\sin nx}{dx} &= \varphi'(x)\sin nx + n\varphi\ldots \end{aligned}$$

Wird die Function $\varphi'(x)$ in einem Punk… so erhält man bei der Integration der link… drücke Glieder von der Form

$$[\varphi(a-0)-\varphi(a+0)]\cos na,$$
$$[\varphi(a-0)-\varphi(a+0)]\sin na,$$

und diese Grössen können zwar bei unendlich wachsenden n unaufhörlich hin und her schwanken, gehen aber nicht über gewisse endliche Grenzen hinaus. Das nämliche gilt von den Integralen

$$\int \varphi'(x)\cos nx\,dx,\quad \int \varphi'(x)\sin nx\,dx\ ^{1)},$$

und demnach ergiebt sich durch Integration von (1) nach §. 31, (1) der Satz:

1. Wenn die Function $\varphi(x)$ endlich ist, so bleiben die Producte na_n, nb_n bei unendlich wachsendem n in endlichen Grenzen eingeschlossen.

Wenn die Function $\varphi(x)$ als stetig vorausgesetzt wird, so werden die Integrale der Functionen auf der linken Seite von (1) gleich Null, und wir erhalten

$$na_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\cos nx\,dx,$$

$$nb_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi'(x)\sin nx\,dx,$$

woraus man, wenn man in 1. $\varphi(x)$ durch $\varphi'(x)$ ersetzt, schliessen kann:

2. Wenn die Function $\varphi(x)$ selbst stetig und $\varphi'(x)$ endlich ist, so sind n^2a_n, n^2b_n bei unendlich wachsenden n endlich,

---

[1] Wir nehmen hier immer an, dass auch $\varphi'(x)$ und die höheren Differentialquotienten, so weit sie in Betracht kommen, in einem endlichen Intervall nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Dann kann man aus der Endlichkeit des Integrals

$$\int \varphi'(x)\,dx$$

auf die Endlichkeit der beiden Integrale

$$\int \varphi'(x)\cos nx\,dx,\qquad \int \varphi'(x)\sin nx\,dx$$

schliessen. Auch unendlich viele Unstetigkeiten sind hier für $\varphi(x)$ und seine Differentialquotienten ausgeschlossen.

und daraus erhält man durch vollständige Induction:

3. Wenn die Function $\varphi(x)$ mit ihren $k-1$ ersten Ableitungen endlich und stetig, und die k^{te} Ableitung noch endlich ist, so sind $n^{k+1}a_n$, $n^{k+1}b_n$ mit unendlich wachsenden n endlich.

Wenn also die zu entwickelnde Function $\varphi(x)$ stetig ist, so ist die Convergenz der Fourier'schen Reihe immer eine unbedingte.

Wenn es sich darum handelt, eine Function zu entwickeln, deren analytisches Gesetz nicht bekannt, die also z. B. graphisch oder durch Beobachtungen gegeben ist, so sind die Functionswerthe auch nicht für alle Argumentwerthe und nicht mit absoluter Schärfe bekannt. Es lassen sich dann die Coëfficienten der Reihe auch nur bis zu einem gewissen Range hin und nur näherungsweise berechnen und man erhält dann einen analytischen Ausdruck, der innerhalb der Grenzen der Genauigkeit der Daten mit der darzustellenden Function übereinstimmt. Ist die Function unstetig, so wird in nächster Nähe der Unstetigkeitsstelle der Fehler immer gross bleiben. Berechnet man aber eine hinlängliche Gliederzahl und mit genügender Genauigkeit, so kann man das Gebiet dieser grösseren Fehler entsprechend einengen.

Fünfter Abschnitt.

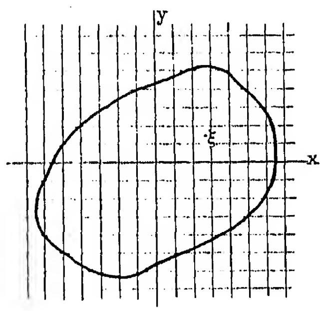
Mehrfache Integrale.

§. 36.

Mehrfache Integrale.

Wir sind schon bei unseren bisherigen Betrachtungen Doppelintegralen begegnet, jedoch haben wir sie da nur als das Ergebniss einer zweimal nach einander auszuführenden einfachen Integration aufgefasst. Wir betrachten sie jetzt als selbständigen Begriff.

Fig. 9.



Wir theilen die xy-Ebene durch eine zweifache Schaar paralleler Geraden und grenzen dann irgend ein endliches Flächenstück F durch eine geschlossene Linie ab. Es ist auch nicht ausgeschlossen, dass die Begrenzung aus mehreren getrennten Linien besteht und also beispielsweise eine ringförmige Gestalt hat. Es sei dann $f(x,y)$ eine Function der Coordinaten x, y, die in einem Punkte ξ den Werth $f(\xi)$ habe; einen solchen Punkt ξ nehmen wir in jedem der Rechtecke δ, in die wir die Ebene eingetheilt haben, soweit sie entweder ganz oder auch nur theilweise in der Fläche F liegen.

Unter dem Doppelintegrale

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy,$$

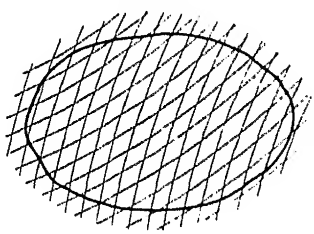
genommen über die Fläche F, verstehen wir dann den Grenzwerth der Summe

$$\Sigma f(\xi)\, \delta, \tag{1}$$

wenn man die Rechtecke δ nach beiden Dimensionen unendlich klein werden lässt; und wie bei den einfachen Integralen lässt sich beweisen, dass ein solcher bestimmter Grenzwerth vorhanden ist, wenn die Function $f(x, y)$ stetig angenommen wird. Es ist dann gleichgültig, ob man die Rechtecke, die nur zum Theil innerhalb F liegen, zu der Summe (1) hinzu nimmt oder ausschliesst, und man sieht auch ebenso ein, dass man statt der Eintheilung in Rechtecke eine beliebige andere Eintheilung von F in Elemente wählen kann, wenn diese Elemente nur nach allen Seiten hin unendlich klein werden, etwa wie die Fig. 10 zeigt.

Hiernach lässt sich dann auch das Doppelintegral durch eine zweimal nach einander auszuführende einfache Integration bestimmen, indem man zunächst etwa y festhält und den Grenzwerth der Summe

Fig. 10.



$$dy\, \Sigma f(\xi)\, dx$$

bestimmt, und dann noch einmal die Summe in Bezug auf dy bildet und abermals zur Grenze übergeht.

Man kann die Definition des Integrals auch auf den Fall ausdehnen, dass $f(x, y)$ an einer Linie unstetig wird, also zu beiden Seiten dieser Linie Werthe von endlicher Differenz hat. Man hat dann nur die Fläche F in Stücke zu zerlegen, und beide Seiten einer Unstetigkeitslinie zur Begrenzung je einer dieser Theilflächen hinzuzunehmen.

Integrale, bei denen die Function in einem Punkte unendlich wird, muss man dadurch erklären, dass man den Unendlichkeitspunkt durch eine Hülle von dem Integrationsgebiete F ausschliesst und dann die Hülle unendlich klein werden lässt. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, dass die Grenzwerthe des Integrals von der Art und Weise abhängen, wie sich die Hülle dem Unstetigkeitspunkte annähert, was in den einzelnen Fällen besonders untersucht werden muss. Aehnlich verhält es sich, wenn die Grenzen der Integration unendlich werden.

Wenn man die Function $f(x, y)$ durch eine auf der xy-Ebene senkrecht stehende z-Ordinate einer krummen Fläche darstellt, so erhält das Doppelintegral die Bedeutung eines Volumens.

Ganz ebenso verhält es sich nun mit den dreifachen Integralen (Raumintegralen)

$$(2) \qquad \iiint f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Hier ist das Integrationsgebiet ein Volumen, was von einer oder mehreren geschlossenen Flächen begrenzt ist. Dies Volumen wird auf irgend eine Weise in Elemente eingetheilt, jedes dieser Elemente wird mit einem Functionswerthe, der einem seiner Punkte angehört, multiplicirt und der Grenzwerth der Summe aller dieser Producte genommen, wenn jedes Volumenelement nach allen Dimensionen unendlich klein wird.

Die Bezeichnungsweise (2) für das Raumintegral entspricht der Vorstellung, dass die Volumenelemente rechtwinklige Parallelepipede $dx\, dy\, dz$ seien, wie sie von drei Schaaren den Coordinatenebenen paralleler Ebenen ausgeschnitten werden. Wenn wir nicht gerade diese, sondern eine beliebige Eintheilung in Elemente im Auge haben, werden wir ein solches Volumenelement auch mit $d\tau$ und demgemäss das Raumintegral mit

$$(3) \qquad \int f\, d\tau$$

bezeichnen. Die Begrenzung, bis zu der sich das Integral erstreckt, muss ausserdem noch angegeben werden.

§. 37.

Transformation von Raumintegralen.

Die verschiedenen Arten der Raumeintheilung bei dreifachen Integralen findet ihren analytischen Ausdruck in der Einführung verschiedener Integrationsvariablen. Um eine solche Transformation auszuführen, denken wir uns die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes ausgedrückt als Functionen von drei neuen Variablen p, q, r, setzen also etwa

$$(1) \qquad x = \varphi(p,q,r), \quad y = \psi(p,q,r), \quad z = \chi(p,q,r).$$

Einem constanten Werthe einer dieser Variablen, z. B. p, entspricht eine Oberfläche, auf der die einzelnen Punkte durch

verschiedene Werthe von q, r unterschieden werden. Es wird so der Raum (oder auch nur ein gewisser Raumtheil) von drei Schaaren von Oberflächen durchzogen, die wir die Flächen (q, r), (r, p), (p, q) nennen, von denen sich je drei in einem Punkte x, y, z schneiden und so diesen Punkt bestimmen. Die drei Flächenschaaren schneiden sich in drei Curvenschaaren, und auf einer dieser Curven ist nur eine der Variablen p, q, r veränderlich. Wir unterscheiden sie als p-Curven, q-Curven und r-Curven. Die so erklärten Variablen p, q, r heissen auch krummlinige Coordinaten.

Durch Differentiation der Gleichungen (1) ergeben sich Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned} dx &= a\,dp + a'\,dq + a''\,dr \\ dy &= b\,dp + b'\,dq + b''\,dr \\ dz &= c\,dp + c'\,dq + c''\,dr, \end{aligned} \tag{2}$$

worin z. B. $a = \partial x / \partial p$ ist und die übrigen Coëfficienten entsprechende Bedeutung haben[1]). Bezeichnen wir mit ds das Linienelement, d. h. die Länge der Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Punkte, so ergiebt sich aus (2)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= e\,dp^2 + e'\,dq^2 + e''\,dr^2 \\ &\quad + 2g\,dq\,dr + 2g'\,dr\,dp + 2g''\,dp\,dq, \end{aligned} \tag{3}$$

worin

$$\begin{aligned} e &= a^2 + b^2 + c^2, & g &= a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'', \\ e' &= a'^2 + b'^2 + c'^2, & g' &= a''\,a + b''\,b + c''\,c, \\ e'' &= a''^2 + b''^2 + c''^2, & g'' &= a\,a' + b\,b' + c\,c'. \end{aligned} \tag{4}$$

Fig. 11.

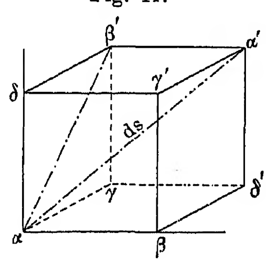
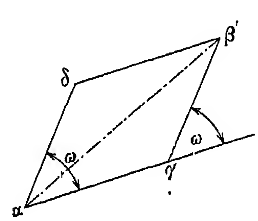


Fig. 12.



---

[1]) Ueber den Begriff des Differentials vergleiche man z. B. Cauchy, Calcul. differentiel. Gesammtausgabe von Cauchy's Werken, Ser. II., Bd. 4, S. 27, 47.

Wir betrachten jetzt ein Volumenelement, welches von sechs Flächen begrenzt wird, die durch die constanten Werthe p, q, r, $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$ bestimmt sind und das wir bei unendlich kleinen dp, dq, dr als Parallelepiped betrachten können.

Die acht Ecken dieses Parallelepipeds haben die Coordinaten

$\alpha)$	$p,$	$q,$	$r,$
$\beta)$	$p + dp,$	$q,$	$r,$
$\gamma)$	$p,$	$q + dq,$	$r,$
$\delta)$	$p,$	$q,$	$r + dr,$
$\alpha')$	$p + dp,$	$q + dq,$	$r + dr,$
$\beta')$	$p,$	$q + dq,$	$r + dr,$
$\gamma')$	$p + dp,$	$q,$	$r + dr,$
$\delta')$	$p + dp,$	$q + dq,$	$r,$

und die Kantenlängen erhält man aus (3):

$$5)\qquad (\alpha\beta) = \sqrt{e}\, dp, \qquad (\alpha\gamma) = \sqrt{e'}\, dq, \qquad (\alpha\delta) = \sqrt{e''}\, dr,$$

wenn die Quadratwurzeln und dp, dq, dr positiv sind.

Es sind dx, dy, dz die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes α' in Bezug auf ein Coordinatensystem, was seinen Ursprung in α hat, und folglich ist

$$dx = ds\cos(ds, x), \quad dy = ds\cos(ds, y), \quad dz = ds\cos(ds, z),$$

und wenn man also zwei verschiedene Punkte α' mit den relativen Coordinaten dx, dy, dz und $d'x, d'y, d'z$ betrachtet, so ist

$$6)\qquad dx\, d'x + dy\, d'y + dz\, d'z = ds\, d's \cos(ds\, d's).$$

Bezeichnet man also mit $\omega, \omega', \omega''$ die drei Kantenwinkel der körperlichen Ecke bei α, und lässt den Punkt α' der Reihe nach mit β, γ, δ zusammenfallen, so ergiebt sich aus (6) mit Hülfe von (4) und (5)

$$7)\qquad g = \sqrt{e'e''}\cos\omega, \quad g' = \sqrt{e''e}\cos\omega', \quad g'' = \sqrt{ee'}\cos\omega''.$$

Nach einem bekannten Satze der Stereometrie ist aber das Volumen eines Parallelepipedons, dessen Kanten a, b, c und dessen Kantenwinkel α, β, γ sind, gleich

$$abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

und hiernach ergiebt sich für unser Volumenelement

$$8)\qquad d\tau = \sqrt{ee'e'' - g^2 e - g'^2 e' - g''^2 e'' + 2gg'g''}\, dp\, dq\, dr.$$

Wenn die Winkel $\omega, \omega', \omega''$ alle drei rechte sind, so heissen p, q, r **orthogonale Coordinaten**.

In diesem Falle, der in den Anwendungen fast allein vorkommt, sind $g, g', g'' = 0$ und der Ausdruck für $d\tau$ vereinfacht sich wesentlich

$$(9) \qquad d\tau = \sqrt{e\,e'\,e''}\,dp\,dq\,dr.$$

Diese Ausdrücke hat man für $d\tau$ in dem Integrale (3), §. 36, einzusetzen, um das Integral auf die Coordinaten p, q, r zu transformiren.

Die Transformation eines Doppelintegrals ist hierin als specieller Fall enthalten. Man hat nur die zu integrirende Function f in §. 36, (3) von z und die Functionen φ, ψ in (1) von r unabhängig anzunehmen und $\chi = r$ zu setzen. Dann folgt im Falle orthogonaler Coordination

$$(10) \qquad \iint f\,dx\,dy = \iint f\sqrt{e\,e'}\,dp\,dq,$$

worin

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2, \qquad e' = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2.$$

Drei von einem Punkte auslaufende, in bestimmter Reihenfolge genommene Richtungen a, b, c, die nicht in einer Ebene liegen, bilden ein Rechtssystem oder ein directes System, wenn für einen Beobachter, dem die Richtung a von den Füssen zum Kopfe läuft, die b-Richtung in die c-Richtung durch eine Drehung von weniger als 180^0 von der Rechten zur Linken übergeht. Im entgegengesetzten Falle heisst a, b, c ein Linkssystem oder ein indirectes System. Ein Rechtssystem kann in ein beliebiges anderes Rechtssystem durch stetige Veränderung seiner Richtungen so übergeführt werden, dass dabei das System nicht durch ein ebenes hindurch geht.

§. 38.

Oberflächenintegrale.

Häufig hat man Integrale zu betrachten, bei denen das Integrationsgebiet ein Theil einer krummen Oberfläche ist. Theilen wir ein solches Oberflächenstück irgendwie in Elemente do ein, so ist das Integral

$$(1) \qquad \int f\,do$$

der Grenzwerth, dem sich die Summe der Producte $f\,d\,o$ nähert, wenn die Elemente $d\,o$ nach allen Dimensionen unendlich klein werden und wenn f der Werth einer auf der ganzen Oberfläche gegebenen Function in einem Punkte des Elementes $d\,o$ ist.

Um ein solches Integral durch ein Doppelintegral auszudrücken, können uns die Formeln des vorigen Paragraphen dienen. Wir erhalten einen analytischen Ausdruck einer krummen Oberfläche, wenn wir $r = \text{const.}$ setzen. Dann bedeuten die Formeln §. 37, (1) eine krumme Oberfläche, die von einem Netze von Curven überzogen ist, deren eine Schaar, die p-Curven, durch constante Werthe von q bestimmt ist, während auf den q-Curven p einen constanten Werth hat.

Fig. 13.

Um ein Linienelement auf der Fläche $r = \text{const.}$ zu erhalten, hat man $d\,r = 0$ zu setzen und findet

$$(2) \qquad d\,s^2 = E\,d\,p^2 + 2\,F\,d\,p\,d\,q + G\,d\,q^2,$$

worin E, F, G für e, g'', e' gesetzt ist, so dass also

$$(3) \qquad \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 \end{aligned}$$

ist.

Vier Linien, $p, p + d\,p, q, q + d\,q$ bilden hier ein Parallelogramm, das wir als das Flächenelement $d\,o$ ansehen. Die Seiten dieses Parallelogramms sind

$$(4) \qquad d\,s_p = \sqrt{E}\,d\,p, \qquad d\,s_q = \sqrt{G}\,d\,q;$$

$d\,s$ ist die Diagonale dieses Parallelogramms, und wenn ω den Winkel bedeutet, den diese Seiten mit einander einschliessen, so ist

$$d\,s^2 = d\,s_p^2 + d\,s_q^2 + 2\,d\,s_p\,d\,s_q \cos\omega,$$

und folglich nach (2) und (4)

$$(5) \qquad F = \sqrt{E\,G}\,\cos\omega.$$

Für das Flächenelement $d\,o$ ergiebt sich aus (5)

$$(6)\qquad d\,o = d\,s_p\,d\,s_q \sin\omega = \sqrt{EG - F^2}\,d\,p\,d\,q.$$

Wenn die Curvenschaaren orthogonal sind, so ist $F = 0$, und der Ausdruck für $d\,o$ wird

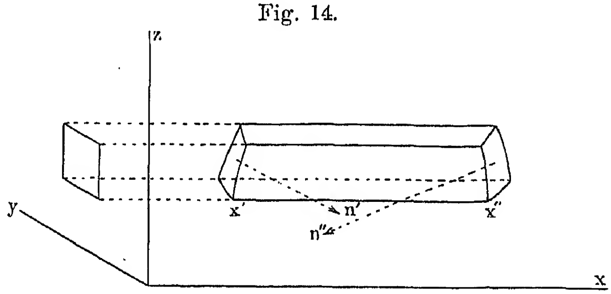
$$(7)\qquad d\,o = \sqrt{EG}\,d\,p\,d\,q.$$

§. 39.

Der Gauss'sche Integralsatz.

Es sei X irgend eine in einem endlichen Raumstücke τ stetige Function der drei Coordinaten; das Raumstück τ sei begrenzt von einer Fläche O, die in allen ihren Punkten, einzelne Linien und Punkte ausgenommen, eine bestimmte Normale hat.

Fig. 14.



Die in das Innere von τ gerichtete Normale soll mit n bezeichnet sein. Es ist auch nicht ausgeschlossen, dass die Grenzfläche O aus mehreren getrennten Stücken besteht. Wir betrachten das über τ ausgedehnte dreifache Integral

$$(1)\qquad J = \iiint \frac{\partial X}{\partial x}\,d\,x\,d\,y\,d\,z.$$

Die Integration nach x ergiebt hier, wenn wir zunächst annehmen, dass eine zur x-Axe parallele Linie die Fläche O nur in zwei Punkten schneidet:

$$(2)\qquad d\,y\,d\,z \int_{x'}^{x''} \frac{\partial X}{\partial x}\,d\,x = d\,y\,d\,z\,(X'' - X'),$$

wenn X', X'' die Werthe der Function X in den Punkten mit den Coordinaten x', y, z; x'', y, z sind. Nun ist das in der $y\,z$-

Ebene gelegene Flächenelement $dy\,dz$ die gemeinschaftliche Projection der beiden Elemente do', do'', die der über $dy\,dz$ stehende, der x-Axe parallele prismatische Stab aus der Oberfläche ausschneidet, und da n' einen spitzen, n'' einen stumpfen Winkel mit der x-Richtung bildet, so ist

$$dy\,dz = do' \cos(n'x) = -do'' \cos(n''x),$$

und es ergiebt sich aus (2)

$$(3)\quad dy\,dz \int_{x'}^{x''} \frac{\partial X}{\partial x}\,dx = -do'\,X' \cos(n'x) - do''\,X'' \cos(n''x).$$

Wenn die Fläche O einen complicirteren Bau hat, so dass sie von der in dem Element $dy\,dz$ fussenden, der x-Axe parallelen Geraden n in mehr als zwei Punkten x', x'', x''', x'''', ... geschnitten wird, so werden diese Punkte abwechselnd Eintritts- und Austrittsstellen sein. Ihre Anzahl ist gerade und die Winkel (n', x), (n'', x), (n''', x), ... sind abwechselnd spitz und stumpf; es ergiebt sich

$$(4)\quad dy\,dz \int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx = dy\,dz\,(-X' + X'' - X''' + X'''' - \dots)$$

und

$$dy\,dz = do' \cos(n'x) = -do'' \cos(n''x) = do''' \cos(n'''x) = \dots,$$

und (4) lässt sich mit Benutzung eines Summenzeichens so darstellen:

$$(5)\qquad dy\,dz \int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx = -\Sigma X \cos(nx)\,do.$$

Nehmen wir nun noch die Summe über alle Elemente $dy\,dz$, so kommt jedes Element do der Oberfläche O in der Gesammtsumme einmal vor und wir erhalten:

$$(6)\qquad \iiint \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = -\int X \cos(nx)\,do,$$

worin sich das Integral nach do über die ganze Oberfläche O erstreckt und unter n immer die nach innen gerichtete Normale zu verstehen ist. Der Formel (6) können wir noch zwei andere, ganz ähnlich gebildete an die Seite stellen, die wir erhalten, wenn wir die x-Axe mit der y-Axe und der z-Axe vertauschen.

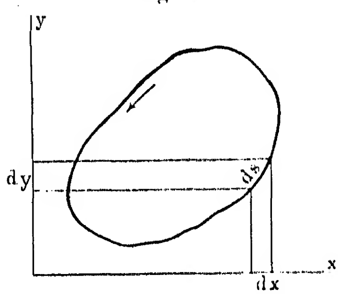
Ersetzen wir gleichzeitig die Function X durch zwei andere Functionen Y, Z und addiren die Resultate, so erhalten wir:

$$(7)\qquad \int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\tau$$
$$= - \int [X \cos(nx) + Y \cos(ny) + Z \cos(nz)]\, do,$$

worin das Oberflächenintegral über die ganze Begrenzung O des Raumes τ zu erstrecken ist.

Dieser Satz, durch den ein Raumintegral von bestimmter Gestalt auf ein Oberflächenintegral zurückgeführt wird, heisst der **Integralsatz von Gauss**.

Fig. 15.



Aus der Formel (7) erhalten wir ein ähnliches specielleres Theorem für die Ebene, wenn wir die Begrenzung des Raumes, auf den sich die Integration bezieht, cylindrisch und von constanter Höhe 1 annehmen. Setzen wir dann $Z = 0$ und nehmen X, Y von z unabhängig an, so verschwinden in dem Oberflächenintegrale die auf die Grundfläche bezüglichen Bestandtheile, und wir erhalten, wenn wir mit df ein Element der Grundfläche, mit ds ein Element der Randcurve der Grundfläche bezeichnen:

$$(8)\qquad \iint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) df = - \int [X \cos(nx) + Y \cos(ny)]\, ds.$$

Wir geben dieser Formel noch eine etwas andere Gestalt. In dem Randintegrale in (8) ist das Element ds als positiv anzunehmen. Wir wollen aber jetzt die Randcurve in einem bestimmten Sinne durchlaufen, den wir den **positiven Sinn** nennen wollen, und zwar in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung, so dass die positive Richtung von n für den in der Richtung s Fortschreitenden zur Linken liegt. Bezeichnen wir also mit dx, dy die Projectionen von ds, und zwar mit Rücksicht auf das Vorzeichen, so ist

$$dx = \cos(ny)\, ds \qquad dy = -\cos(nx)\, ds,$$

und wenn wir noch

$$X = + V \qquad Y = - U$$

setzen, so folgt aus (8)

$$(9)\qquad \iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=\int(U\,dx+V\,dy).$$

Hier bezieht sich das Doppelintegral auf eine beliebige, in der xy-Ebene gelegene Fläche, das einfache Integral auf den Rand dieser Fläche. U, V sind zwei beliebige, in dieser Fläche stetige Functionen.

Der Sinn des Begrenzungsintegrals ist näher dadurch bestimmt, dass s, n, z ein directes System bilden, wenn das Coordinatensystem x, y, z direct ist.

§. 40.

Der Satz von Stokes.

Wenn man den Gauss'schen Integralsatz statt auf die Ebene auf eine beliebige krumme Oberfläche anwendet, erhält man den Satz von Stokes.

Wir betrachten ein durch irgend welche Curven begrenztes Stück S einer krummen Oberfläche, die wir wie in §. 38 durch zwei unabhängige Variable p, q analytisch darstellen, so dass

$$(1)\qquad \begin{aligned} dx &= a\,dp+a'\,dq\\ dy &= b\,dp+b'\,dq\\ dz &= c\,dp+c'\,dq \end{aligned}$$

die Projectionen eines in der Fläche liegenden Linienelementes auf die Coordinatenaxen sind.

Wenn wir p, q als rechtwinklige Coordinaten in einer Hülfsebene darstellen, so wird das Flächenstück S durch ein begrenztes Stück dieser Hülfsebene dargestellt, und wenn dann U, V zwei stetige Ortsfunctionen in der Fläche S sind, also Functionen von p, q, so können wir die Formel (9) des vorigen Paragraphen anwenden und erhalten:

$$(2)\qquad \iint\left(\frac{\partial V}{\partial p}-\frac{\partial U}{\partial q}\right)dp\,dq=\int(U\,dp+V\,dq).$$

Um den Sinn dieses Integrals genau zu bestimmen, wollen wir in jedem Punkte der Fläche S eine Normale ν in dem Sinne ziehen, dass die Richtungen der wachsenden p, q, ν ein directes System bilden. Dann entsprechen dp, dq in dem Randintegrale

einem Elemente ds der Begrenzung von der Richtung, dass ds, dn, ν ein directes System bilden, wenn dn die in das Innere des Flächenstückes S gezogene Senkrechte auf ds, ν ist.

Wir nehmen nun drei neue stetige Functionen X, Y, Z in der Fläche S an und setzen

$$(3) \qquad \begin{aligned} U &= Xa + Yb + Zc, \\ V &= Xa' + Yb' + Zc', \end{aligned}$$

so dass das Randintegral die Form erhält:

$$(4) \qquad \int (X dx + Y dy + Z dz),$$

worin dann dx, dy, dz die Projectionen von ds auf die Coordinatenaxen, mit Rücksicht auf das Vorzeichen, bedeuten.

Um die Substitution auch in dem Flächenintegrale auszuführen, bedenken wir, dass nach der Bedeutung von a, b, c, a', b', c' die Relationen bestehen:

$$\frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\partial a'}{\partial p}, \qquad \frac{\partial b}{\partial q} = \frac{\partial b'}{\partial p}, \qquad \frac{\partial c}{\partial q} = \frac{\partial c'}{\partial p},$$

und daher ist

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} = a' \frac{\partial X}{\partial p} + b' \frac{\partial Y}{\partial p} + c' \frac{\partial Z}{\partial p} \\ - a \frac{\partial X}{\partial q} - b \frac{\partial Y}{\partial q} - c \frac{\partial Z}{\partial q}. \end{aligned}$$

Wenn nun X, Y, Z als Functionen von x, y, z gegeben sind, so folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial p} &= a \frac{\partial X}{\partial x} + b \frac{\partial X}{\partial y} + c \frac{\partial X}{\partial z}, \\ \frac{\partial X}{\partial q} &= a' \frac{\partial X}{\partial x} + b' \frac{\partial X}{\partial y} + c' \frac{\partial X}{\partial z}, \text{ u. s. f.,} \end{aligned}$$

und wenn man dies in (5) einsetzt, ergiebt sich

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q} = (bc' - cb') \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ + (ca' - ac') \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + (ab' - ba') \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Da nun ν überall auf der Fläche S senkrecht steht, so ist für jedes dx, dy, dz, das den Bedingungen (1) genügt [§. 37, (6)]:

$$\cos(\nu, x)\, dx + \cos(\nu, y)\, dy + \cos(\nu, z)\, dz = 0,$$

$$a'\cos(\nu,x) + b'\cos(\nu,y) + c'\cos(\nu,z) = 0,$$

woraus man durch Auflösung erhält, wenn λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \cos(\nu,x) &= \lambda(bc' - cb'), \\ \cos(\nu,y) &= \lambda(ca' - ac'), \\ \cos(\nu,z) &= \lambda(ab' - ba'). \end{aligned}$$

Es ist aber nach bekannten Formeln

$$\cos(\nu,x)^2 + \cos(\nu,y)^2 + \cos(\nu,z)^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} &(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \\ &= EG - F^2, \end{aligned}$$

woraus

$$\lambda\sqrt{EG - F^2} = 1,$$

oder mit Benutzung von §. 38 (6)

$$(8) \qquad \lambda\, do = dp\, dq.$$

Um das Vorzeichen von λ zu bestimmen, kann man, ohne dass λ durch Null geht, durch stetige Veränderung die Richtungen p, q, ν mit x, y, z zusammenfallen lassen, vorausgesetzt, dass das Coordinatensystem x, y, z ein directes ist. Dann aber wird $\cos(\nu,z) = 1$, $a' = 0$, a und b' positiv; also ist auch λ positiv, wie wir es in (8) angenommen haben. Nach den Formeln (7) und (8) ergiebt sich nun aus (6)

$$(9) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial q}\right) dp\, dq = \Big[&\cos(\nu,x)\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) \\ &+ \cos(\nu,y)\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \cos(\nu,z)\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\Big] do, \end{aligned}$$

und folglich aus (2) und (3)

$$(10) \qquad \begin{aligned} \int\Big[&\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\nu,x) + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\nu,y) \\ &+ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\nu,z)\Big] do = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \end{aligned}$$

In dieser Form ist jede Spur der Coordinaten p, q verschwunden. Der durch die Formel (10) ausgedrückte Satz heisst der Satz von Stokes.

§. 41.

Transformation von Differentialausdrücken.

Jacobi hat die Transformation mehrfacher Integrale zur Einführung neuer Variablen in gewisse Differentialausdrücke benutzt, die in der mathematischen Physik häufig vorkommen, deren Umformung ohne dieses Hülfsmittel sehr weitläufige Rechnungen erfordern würde.

Es seien U, V zwei stetige Functionen in einem irgendwie begrenzten Raumtheile τ, an dessen Grenze die Function V den Werth 0 habe. Wir betrachten das Integral

$$(1)\qquad \Omega = \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Hierin benutzen wir die Identitäten:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial x}}{\partial x} - V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial y}}{\partial y} - V\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial z}}{\partial z} - V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

wodurch Ω in zwei Theile zerfällt, deren erster

$$\iiint \left(\frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial V\frac{\partial U}{\partial z}}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

sich nach dem Gauss'schen Theorem in ein Oberflächenintegral verwandeln lässt, das aber wegen der Voraussetzung, dass V an der Grenze verschwinden soll, gleich Null wird. Setzen wir also zur Abkürzung

$$(2)\qquad \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

um hier eine später oft zu benutzende Bezeichnung einzuführen, so folgt:

ein, indem wir

$$(4)\qquad x = \varphi(p,q,r), \quad y = \psi(p,q,r), \quad z = \chi(p,q,r),$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} dx &= a\,dp + a'\,dq + a''\,dr, \\ dy &= b\,dp + b'\,dq + b''\,dr, \\ dz &= c\,dp + c'\,dq + c''\,dr \end{aligned}$$

setzen. Wir wollen aber hier der Einfachheit halber annehmen, die neuen Coordinaten seien orthogonal, was für die meisten Anwendungen genügt. Dann haben wir die Relationen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} e &= a^2 + b^2 + c^2, & 0 &= a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'', \\ e' &= a'^2 + b'^2 + c'^2, & 0 &= a''\,a + b''\,b + c''\,c, \\ e'' &= a''^2 + b''^2 + c''^2, & 0 &= a\,a' + b\,b' + c\,c', \end{aligned}$$

$$(7)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e\,dp^2 + e'\,dq^2 + e''\,dr^2.$$

Wenn wir mit Hülfe der Relationen (6) die Gleichungen (5) auflösen, indem wir z. B. mit a, b, c multiplieiren und addiren, so folgt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} e\,dp &= a\,dx + b\,dy + c\,dz, \\ e'\,dq &= a'\,dx + b'\,dy + c'\,dz, \\ e''\,dr &= a''\,dx + b''\,dy + c''\,dz, \end{aligned}$$

und daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen von p, q, r nach x, y, z, z. B.

$$(9)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a}{e}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{b}{e}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{c}{e}.$$

Hiernach können wir die Ableitungen einer willkürlichen Function U nach x, y, z durch die Ableitungen nach p, q, r folgendermaassen ausdrücken:

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial p}\frac{a}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{a'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{a''}{e''}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial p}\frac{b}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{b'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{b''}{e''}, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial p}\frac{c}{e} + \frac{\partial U}{\partial q}\frac{c'}{e'} + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{c''}{e''}. \end{aligned}$$

Wir stellen nun das nämliche Gleichungssystem für eine zweite Function V auf und bilden die Summe der Producte entsprechender Gleichungen, um die in Ω unter dem Integral-

zeichen stehende Function zu erhalten. Mit Rücksicht auf (6) ergiebt sich dann

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}$$
$$=\frac{1}{e}\frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}+\frac{1}{e'}\frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q}+\frac{1}{e''}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r},$$

und indem wir das Integral Ω auf die neuen Variablen transformiren und für das Volumenelement nach §. 37

$$d\tau = \sqrt{e e' e''}\, dp\, dq\, dr$$

setzen, erhalten wir

$$\Omega = \iiint \left(\sqrt{\frac{e' e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}+\sqrt{\frac{e'' e}{e'}}\frac{\partial U}{\partial q}\frac{\partial V}{\partial q}\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{e e'}{e''}}\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) dp\, dq\, dr.$$

Dies Integral können wir nun wieder nach dem Gauss'schen Theorem umformen, wenn wir

$$\sqrt{\frac{e' e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial p}\left\{\sqrt{\frac{e' e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p}V\right\}-V\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e' e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p}$$

setzen, und die entsprechende Zerlegung in den beiden anderen Gliedern machen. Da nun an der Grenze des Gebietes $V=0$ angenommen war, so fällt wiederum das Oberflächenintegral weg und es ergiebt sich

$$(11)\qquad \Omega = -\iiint V\left\{\frac{\partial}{\partial p}\sqrt{\frac{e' e''}{e}}\frac{\partial U}{\partial p}+\frac{\partial}{\partial q}\sqrt{\frac{e'' e}{e'}}\frac{\partial U}{\partial q}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{\frac{e e'}{e''}}\frac{\partial U}{\partial r}\right\} dp\, dq\, dr.$$

Transformirt man das Integral Ω in der Form (3) auf die neuen Variablen, so erhält es die Form

$$(12)\qquad \Omega = -\iiint V \Delta U \sqrt{e e' e''}\, dp\, dq\, dr,$$

und da nun die Integrale (11) und (12) für eine willkürliche Function V übereinstimmen müssen, so folgt die Transformation des Ausdruckes ΔU auf die neuen Variablen:

Die Quadratwurzeln, die hier vorkommen, sind alle mit positivem Vorzeichen zu nehmen.

> Es kommt also sowohl bei der Transformation der Raumintegrale, als auch des Differentialausdruckes ΔU nur darauf an, die Coëfficienten e, e', e'' in dem Ausdrucke für das Linienelement zu bilden.

Wir heben noch den besonderen Fall hervor, dass nur für die beiden Variablen x, y zwei neue Variable p, q eingeführt werden, während z ungeändert bleibt.

Ist dann

$$dx^2 + dy^2 = e\,dp^2 + e'\,dq^2,$$

e und e' von z unabhängig und $e'' = 1$, so folgt aus (13)

$$\text{(14)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{e e'}} \left(\frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\frac{e'}{e}} \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \sqrt{\frac{e}{e'}} \frac{\partial U}{\partial q} \right),$$

und wenn, noch specieller, $e = e'$ ist

$$\text{(15)} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{e} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right).$$

§. 42.

I. Beispiel. Cylindercoordinaten, Polarcoordinaten.

Wir wollen die abgeleiteten Sätze an einigen Beispielen erläutern und wählen dabei solche, die auch bei Anwendungen von Nutzen sind.

1. Wir nehmen zunächst die Cylindercoordinaten, d. h. Polarcoordinaten, in der xy-Ebene, verbunden mit der unveränderten z-Ordinate. Wir setzen also

$$\text{(1)} \qquad x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi, \qquad z = z,$$

so dass, was im Allgemeinen mit p, q, r bezeichnet war, hier r, φ, z ist. Dann ist

$$dx = dr \cos \varphi - r \sin \varphi \, d\varphi,$$
$$dy = dr \sin \varphi + r \cos \varphi \, d\varphi,$$

und wir erhalten für das Quadrat des Linienelementes

(2) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

und es ist also e, e', e'' gleich $1, r^2, 1$ zu setzen. Danach wird das Volumenelement

(3) $$d\tau = r\, dr\, d\varphi\, dz$$

und ferner

(4) $$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

und hierfür kann man auch setzen, wie eine einfache Rechnung zeigt

(5) $$\sqrt{r}\,\Delta U = \frac{\partial^2 \sqrt{r}\, U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{r}\, U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sqrt{r}\, U}{\partial \varphi^2} + \frac{\sqrt{r}\, U}{4 r^2}.$$

2. Räumliche Polarcoordinaten

(6) $$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta. \end{aligned}$$

Es ist hier r der Radius-Vector vom Coordinatenanfange bis zu einem veränderlichen Punkte; ϑ ist der Winkel, den dieser Radius-Vector mit der z-Axe einschliesst (Zenithdistanz), und φ ist der Winkel, den die durch r und die z-Axe gelegte Meridianebene mit der xz-Ebene einschliesst, oder das Azimuth. Wenn wir

$$0 < r \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

nehmen, so erhalten wir jeden Punkt, mit Ausnahme der Punkte der z-Axe, ein und nur einmal. Um die Punkte der positiven oder negativen z-Axe zu erhalten, hat man $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ zu setzen, und φ ist unbestimmt. Den Nullpunkt selbst erhält man für $r = 0$; ϑ und φ sind für diesen Punkt beide unbestimmt.

Durch Differentiation von (6) ergiebt sich nun

$$\begin{aligned} dx &= dr \sin\vartheta \cos\varphi + r \cos\vartheta \cos\varphi\, d\vartheta - r \sin\vartheta \sin\varphi\, d\varphi, \\ dy &= dr \sin\vartheta \sin\varphi + r \cos\vartheta \sin\varphi\, d\vartheta + r \sin\vartheta \cos\varphi\, d\varphi, \\ dz &= dr \cos\vartheta - r \sin\vartheta\, d\vartheta, \end{aligned}$$

und daraus, wenn ds das Linienelement ist:

(7) $$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Das Coordinatensystem ist also orthogonal, und es ist

(8) $$e = 1, \quad e' = r^2, \quad e'' = r^2 \sin^2\vartheta,$$

folglich das Volumenelement

(9) $$d\tau = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

und

(10) $$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \, r^2 \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

wofür man auch setzen kann

(11) $$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 r U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

oder endlich auch so:

(12) $$\Delta U = \frac{1}{r^2 \sqrt{r}} \left| r \frac{\partial \, r \frac{\partial \sqrt{r}\, U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial \sqrt{r}\, U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 \sqrt{r}\, U}{\partial \varphi^2} - \frac{\sqrt{r}\, U}{4} \right|.$$

§. 43.

II. Beispiel. Elliptische Coordinaten.

Wenn a, b, c irgend drei reelle Grössen sind, die der Grösse nach so auf einander folgen:

$$a < b < c,$$

dann hat die Gleichung für die Unbekannte λ

(1) $$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} = 1$$

für jedes bestimmte Werthsystem x, y, z drei reelle Wurzeln, die wir mit p, q, r bezeichnen, die der Grösse nach folgende Lage haben:

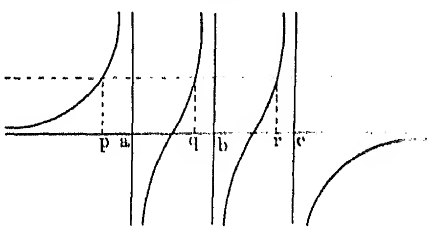
(2) $$p < a < q < b < r < c.$$

Man überzeugt sich davon am einfachsten, wenn man λ als Abscisse in einem ebenen rechtwinkligen Coordinatensysteme ansieht und

$$f(\lambda) = \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda}$$

als Ordinate einer Curve darstellt. Wenn λ durch a oder durch b oder durch c geht, so geht $f(\lambda)$ von positiv unendlichen zu negativ unendlichen Werthen über, und die Curve nähert sich nach beiden Seiten hin asymptotisch der λ-Axe.

Fig. 16.



Eine Parallele zur Abscissenaxe in der Höhe $+1$ schneidet diese Curve also in drei Punkten, von denen der eine auf der negativen Seite von a, der zweite zwischen a und b und der dritte zwischen b und c liegt.

Für ein constantes λ ist (1) die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, und diese Fläche ist

ein Ellipsoid, wenn . . . . $\lambda < a$,
„ einschaaliges Hyperboloid, wenn . . $a < \lambda < b$,
„ zweischaaliges „ „ . . $b < \lambda < c$.

Die ganze Schaar dieser Flächen heisst eine Schaar **confocaler Flächen zweiten Grades**, und aus (2) ergiebt sich, dass durch jeden Punkt x, y, z eine Fläche von jeder der drei Arten hindurchgeht. Umgekehrt bestimmen je eine Fläche aus jeder der drei Arten die Werthe von x^2, y^2, z^2 eindeutig (den Punkt x, y, z selbst aber achtdeutig). Die Werthe p, q, r heissen die **elliptischen Coordinaten** des Punktes x, y, z. Diese bestimmen den Punkt aber erst dann eindeutig, wenn noch bekannt ist, in welchem Octanten er liegt.

Um nun x, y, z als Functionen von p, q, r auszudrücken, verfahren wir so: Wir setzen zunächst zur Abkürzung

(3) $$\varphi(\lambda) = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda),$$

und wenn wir nun das Product

$$\varphi(\lambda)\,[f(\lambda) - 1] = F(\lambda)$$

bilden, so erhalten wir eine Function dritten Grades von λ, in

der λ^3 den Coëfficienten 1 hat, und die für $\lambda = p$, $\lambda = q$, $\lambda = r$ verschwindet. Es ist also nach einem bekannten Satze der Algebra

$$F(\lambda) = (\lambda - p)(\lambda - q)(\lambda - r),$$

folglich

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} - 1 = \frac{(\lambda-p)(\lambda-q)(\lambda-r)}{(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)},$$

und diese Gleichung ist in Bezug auf λ eine Identität. Wenn wir also (4) mit $a - \lambda$ multipliciren und dann $\lambda = a$ setzen, und ebenso mit $b - \lambda$ und $c - \lambda$ verfahren, so ergiebt sich

$$(5) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{(a-p)(a-q)(a-r)}{(b-a)(c-a)}, \\ y^2 &= \frac{(b-p)(b-q)(b-r)}{(c-b)(a-b)}, \\ z^2 &= \frac{(c-p)(c-q)(c-r)}{(a-c)(b-c)}, \end{aligned}$$

und hierdurch sind x^2, y^2, z^2 als Functionen von p, q, r dargestellt.

Aus (4) erhalten wir noch ein anderes System von Formeln, wenn wir nach λ differentiiren und dann $\lambda = p, q, r$ setzen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{(a-p)^2} + \frac{y^2}{(b-p)^2} + \frac{z^2}{(c-p)^2} &= \frac{(p-q)(p-r)}{\varphi(p)}, \\ \frac{x^2}{(a-q)^2} + \frac{y^2}{(b-q)^2} + \frac{z^2}{(c-q)^2} &= \frac{(q-r)(q-p)}{\varphi(q)}, \\ \frac{x^2}{(a-r)^2} + \frac{y^2}{(b-r)^2} + \frac{z^2}{(c-r)^2} &= \frac{(r-p)(r-q)}{\varphi(r)}, \end{aligned}$$

und weiter erhalten wir aus (5) die Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{(a-q)(a-r)} + \frac{y^2}{(b-q)(b-r)} + \frac{z^2}{(c-q)(c-r)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a-r)(a-p)} + \frac{y^2}{(b-r)(b-p)} + \frac{z^2}{(c-r)(c-p)} &= 0, \\ \frac{x^2}{(a-p)(a-q)} + \frac{y^2}{(b-p)(b-q)} + \frac{z^2}{(c-p)(c-q)} &= 0, \end{aligned}$$

von denen man die erste etwa so ableitet, dass man ihre linke Seite nach (5) in die Form setzt

$$\frac{(a-p)(b-c)+(b-p)(c-a)+(c-p)(a-b)}{(c-b)(a-c)(b-a)},$$

in der, wie man sieht, der Zähler verschwindet.

Wenn wir nun die Gleichungen (5) logarithmisch differentiiren, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
&-2\,dx = \frac{x\,dp}{a-p} + \frac{x\,dq}{a-q} + \frac{x\,dr}{a-r},\\
(8)\qquad &-2\,dy = \frac{y\,dp}{b-p} + \frac{y\,dq}{b-q} + \frac{y\,dr}{b-r},\\
&-2\,dz = \frac{z\,dp}{c-p} + \frac{z\,dq}{c-q} + \frac{z\,dr}{c-r}.
\end{aligned}
$$

Hiervon lässt sich die Quadratsumme nach (6) und (7) sehr leicht bilden, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad 4\,ds^2 = &\frac{(p-q)(p-r)}{\varphi(p)}\,dp^2 + \frac{(q-r)(q-p)}{\varphi(q)}\,dq^2\\
&+ \frac{(r-p)(r-q)}{\varphi(r)}\,dr^2,
\end{aligned}
$$

woraus zunächst zu ersehen ist, dass die elliptischen Coordinaten orthogonal sind. Es ist ferner

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad &e = \frac{(p-q)(p-r)}{4\,\varphi(p)}, \quad e' = \frac{(q-r)(q-p)}{4\,\varphi(q)},\\
&e'' = \frac{(r-p)(r-q)}{4\,\varphi(r)}.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergiebt sich für das Volumenelement

$$(11)\qquad d\tau = \frac{(r-q)(r-p)(q-p)\,dp\,dq\,dr}{8\sqrt{-\varphi(p)\,\varphi(q)\,\varphi(r)}},$$

wo sich das negative Zeichen unter der Wurzel dadurch erklärt, dass nach (2) $\varphi(p)$, $\varphi(r)$ positiv, $\varphi(q)$ negativ ist.

Für ΔU erhält man nach (10)

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad \frac{(q-p)(r-p)(r-q)}{4}\,\Delta U = &(r-q)\sqrt{\varphi(p)}\,\frac{\partial \sqrt{\varphi(p)}\,\frac{\partial U}{\partial p}}{\partial p}\\
+ (r-p)\sqrt{-\varphi(q)}\,\frac{\partial \sqrt{-\varphi(q)}\,\frac{\partial U}{\partial q}}{\partial q} &+ (q-p)\sqrt{\varphi(r)}\,\frac{\partial \sqrt{\varphi(r)}\,\frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Dieser Ausdruck stellt sich noch einfacher dar, wenn man

für p, q, r drei neue Variablen ξ, η, ζ einführt, die durch die Gleichungen definirt sind

$$\frac{dp}{\sqrt{\varphi(p)}} = d\xi, \qquad \frac{dq}{\sqrt{-\varphi(q)}} = d\eta, \qquad \frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = d\zeta.$$

Man erhält so

$$(13) \qquad \frac{(q-p)(r-p)(r-q)}{4}\,\Delta U$$
$$= (r-q)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + (r-p)\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + (q-p)\frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2}.$$

Hierin sind p, q, r elliptische Functionen der Variablen ξ, η, ζ.

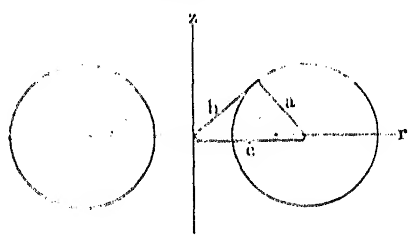
§. 44.

III. Beispiel. Ringcoordinaten.

Wenn ein Kreis um eine Axe gedreht wird, die in seiner Ebene liegt, aber die Peripherie nicht schneidet, so entsteht ein Ring.

Um die für einen solchen Ring passenden Coordinaten zu gewinnen, nehmen wir die Rotationsaxe zur z-Axe und legen ein Coordinatensystem r, z in die Meridianebene.

Fig. 17.



Ist c der Mittelpunktsabstand und a der Radius des Kreises, so ist die Länge der Tangente vom Coordinatenanfangspunkte $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Wir setzen, indem wir $\sqrt{-1}$ mit i bezeichnen,

$$(1) \qquad r + iz = b\,\frac{1 - e^{\lambda + i\omega}}{1 + e^{\lambda + i\omega}},$$

so dass λ und ω neue, an Stelle von r und z einzuführende reelle Variable sind. Ausserdem setzen wir

$$(2) \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Um die Bedeutung der neuen Variablen zu erhalten, lösen wir die Gleichung (1) auf und finden:

$$(3) \qquad e^{\lambda+i\omega} = \frac{b-r-iz}{b+r+iz}, \qquad e^{\lambda-i\omega} = \frac{b-r+iz}{b+r-iz};$$

multiplicirt man beides, so ergiebt sich

$$(4) \qquad e^{2\lambda}[(b+r)^2+z^2] = (b-r)^2+z^2,$$

woraus man ersieht, dass constanten Werthen von λ die Kreise eines Büschels mit imaginären Schnittpunkten entsprechen. Die Grenzpunkte dieses Büschels sind die Punkte $z = 0$, $r = \pm b$. Zu diesem Kreisbüschel gehört auch der gegebene Kreis, der dem speciellen Werthe

$$(5) \qquad \lambda = \log\frac{\sqrt{c+a}-\sqrt{c-a}}{\sqrt{c+a}+\sqrt{c-a}},$$

$$(6) \qquad \frac{e^{-\lambda}-e^{\lambda}}{2} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}, \qquad \frac{e^{-\lambda}+e^{\lambda}}{2} = \frac{c}{a}$$

entspricht.

Dividirt man die beiden Gleichungen (3) durch einander, so folgt

$$e^{i\omega}[(b-iz)^2-r^2] = e^{-i\omega}[(b+iz)^2-r^2]$$

oder

$$(7) \qquad (r^2+z^2-b^2)\sin\omega + 2bz\cos\omega = 0,$$

und dies giebt für constante ω die Kreise eines zweiten Büschels, deren Schnittpunkte die Grenzpunkte des vorigen sind und die die Kreise des ersten Büschels orthogonal schneiden.

Aus (1) erhält man

$$(8) \qquad r = \frac{b(1-e^{2\lambda})}{1+2e^{\lambda}\cos\omega+e^{2\lambda}}, \qquad z = -\frac{2be^{\lambda}\sin\omega}{1+2e^{\lambda}\cos\omega+e^{2\lambda}},$$

$$dr + i\,dz = -2b\frac{e^{\lambda+i\omega}(d\lambda+i\,d\omega)}{(1+e^{\lambda+i\omega})^2},$$

$$dr^2+dz^2 = 4b^2\frac{e^{2\lambda}(d\lambda^2+d\omega^2)}{(1+2e^{\lambda}\cos\omega+e^{2\lambda})^2} = \frac{4r^2(d\lambda^2+d\omega^2)}{(e^{\lambda}-e^{-\lambda})^2},$$

und folglich nach (2)

$$(9) \qquad ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = dr^2+dz^2+r^2d\varphi^2$$
$$= r^2\left[\frac{4(d\lambda^2+d\omega^2)}{(e^{\lambda}-e^{-\lambda})^2}+d\varphi^2\right].$$

Aus §. 42, (5) erhalten wir, wenn wir

$$(10) \qquad \sqrt{r}\,U = V$$

setzen,

und wenn wir auf die beiden ersten Glieder die Formel §. 41, (15) anwenden, so folgt mit Hülfe von (6)

$$(12)\qquad r^2\sqrt{r}\,.\,\Delta U = \left(\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{4} V^{1)}.$$

Wegen einer späteren Anwendung geben wir den Gleichungen (8) mit Hülfe von (6) noch die folgende Gestalt:

$$r = \frac{b^2}{c + a\cos\omega}, \qquad z = \frac{-ab\sin\omega}{c + a\cos\omega},$$

und folglich

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{b^2}{c + a\cos\omega}\cos\varphi, \\ y &= \frac{b^2}{c + a\cos\omega}\sin\varphi, \\ z &= \frac{-ab}{c + a\cos\omega}\sin\omega. \end{aligned}$$

Bisher waren λ, ω, φ unabhängige Variable, die einen Punkt im Raume bestimmen; a und c sind mit λ variabel; b ist constant für das Ringsystem. Lassen wir aber jetzt λ ungeändert, so bleiben auch a und c constant und die Ausdrücke (13) stellen die Coordinaten eines Punktes einer bestimmten Ringfläche durch die beiden variablen Parameter ω und φ dar, und wenn man in (9) $d\lambda = 0$ setzt, so erhält man den Ausdruck für das Quadrat eines Linienelementes auf dieser Ringfläche, nämlich

$$(14)\qquad ds^2 = \frac{b^2}{(c + a\cos\omega)^2}\,(a^2 d\omega^2 + b^2 d\varphi^2).$$

---

[1]) Vergl. über diese Umformung Riemann, Mathematische Werke, 2. Aufl., Nr. XXIV; C. Neumann, Elektrische Vertheilung in einem Ringe.

Sechster Abschnitt.

Functionen complexen Arguments.

§. 45.

Definition einer Function complexen Arguments.

Es sei in einer Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y angenommen, so dass jeder Punkt der Ebene durch Angabe seiner Coordinaten x, y bestimmt ist. Wenn wir aber die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ zu Hülfe nehmen, so können wir auch sagen, dass der Punkt durch die Angabe des Werthes der complexen Variablen

(1)
$$z = x + yi$$

bestimmt ist; und so ist jeder Punkt der Ebene Träger oder Bild eines Werthes von z. Umgekehrt entspricht auch jedem Werth von z ein eindeutig bestimmter Punkt der Ebene. Wenn man Polarcoordinaten einführt, also

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta$$

setzt, so kann man auch setzen

(2)
$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = re^{\vartheta i}.$$

Die positive Grösse $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ wird der absolute Werth der Variablen z genannt. Der Winkel ϑ kann zwischen 0 und 2π oder in irgend einem Intervall von dem Umfang 2π, mit Einschluss der einen der beiden Grenzen, angenommen werden.

Wenn man zwei complexe Grössen

$$z = x + yi, \qquad z_1 = x_1 + y_1 i$$

addiren will, so hat man ein Parallelogramm zu construiren, dessen eine Ecke im Nullpunkt liegt, und in dem die zwei an-

liegenden Ecken z und z_1 sind. Die gegenüberliegende Ecke ist dann der Punkt $z + z_1$. Ist z_1 unendlich klein, so hat $0, z_1$ doch eine bestimmte Richtung, und wir setzen dann auch $z_1 = dz$ oder $dz = dx + i\,dy$. Durch die Grösse dz ist dann ein unendlich kleiner Fortschritt vom Punkte z aus in einer bestimmten Richtung gegeben. Die Tangente des Winkels, unter dem diese Richtung gegen die x-Axe geneigt ist, ist dann gleich dem Verhältniss $dy : dx$. Eine stetige Veränderung von z von einem Punkte a bis zu einem Punkte b wird durch eine Curve dargestellt, die den Punkt a mit b verbindet, und dieser Uebergang kann auf unendlich viele Arten geschehen. Das Linienelement ds einer solchen Curve ist dann der absolute Werth des Differentials dz.

Eine Function w der beiden Variablen x, y hat, wenigstens soweit sie eindeutig definirt ist, in jedem Punkte der Ebene

Fig. 18.

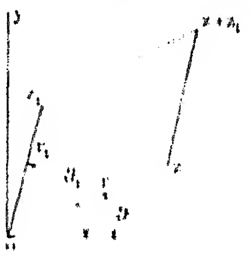
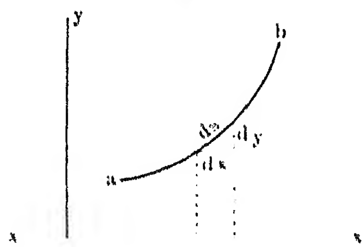


Fig. 19.



einen bestimmten Werth, und folglich gehört auch zu jedem Werthe von z ein bestimmter Werth von w. Diese Zuordnung kann sich auch auf einen gewissen Theil der z-Ebene beschränken, von dem wir aber stets annehmen, dass es ein Flächentheil und nicht eine blosse Linie sei. Gehen wir von dem Punkt z zu einem unendlich benachbarten Punkte $z + dz$ über, so erleidet auch w eine Aenderung, und wir bezeichnen den neuen Werth von w mit $w + dw$.

Trotz dieser eindeutigen Zuordnung der Werthe von w und z nennen wir aber w noch nicht eine Function von z, sondern nur eine Function von x und y. Damit w eine Function von z sei, muss noch eine weitere Bedingung erfüllt sein, die wir nach Riemann so fassen:

Es wird w eine Function von z genannt, wenn das Differentialverhältniss dw/dz in jedem Punkte

> z einen von der Richtung von dz unabhängigen Werth hat. Ausgenommen können dabei einzelne Punkte sein, in denen dies Verhältniss überhaupt nicht endlich ist.

Mit anderen Worten, es wird von einer Function $f(z)$ des complexen Arguments z verlangt, dass sie einen Differentialquotienten in Bezug auf z besitze.

Wenn diese Forderung erfüllt ist, so müssen wir denselben Werth des Quotienten dw/dz erhalten, wenn wir $dy = 0$ oder $dx = 0$ setzen, und so erhalten wir

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{dy}. \tag{3}$$

Wenn umgekehrt die Bedingung

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y} \tag{4}$$

befriedigt ist, so folgt

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy = \frac{\partial w}{\partial x}(dx + i\,dy),$$

woraus der von dz unabhängige Werth (3) von dw/dz wieder hervorgeht.

Die Differentialgleichung (4) ist also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass w eine Function des complexen Arguments z sei.

§. 46.

Conforme Abbildung.

Die Differentialgleichung §. 45 (4) kann offenbar nicht erfüllt sein, wenn w reell oder rein imaginär ist. Es muss also w ebenfalls complex sein, und wir setzen daher

$$w = u + iv, \tag{1}$$

worin u und v reelle Functionen von x, y sind. Für diese Functionen ergeben sich aus §. 45 (4) die Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

oder, da hier der reelle Theil dem reellen, der imaginäre Theil dem imaginären gleich sein muss

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

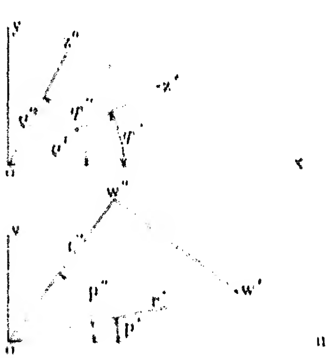
und wenn man diese beiden Gleichungen nach x und y differentiirt und addirt oder subtrahirt, so erhält man

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Zur geometrischen Veranschaulichung nehmen wir eine zweite Ebene zu Hülfe, in der u, v rechtwinklige Coordinaten eines Punktes sind, und nennen diese Ebene die w-Ebene, während die xy-Ebene auch die z-Ebene heisst. Dann wird, soweit u, v als Functionen von x, y gegeben sind, jedem Punkt der z-Ebene ein Punkt der w-Ebene zugeordnet, und wenn die Functionen u, v stetig sind, so bewegt sich der Punkt w in seiner Ebene stetig, wenn sich z stetig verändert. Es entsprechen Linien und Flächenstücken in der z-Ebene Linien und Flächenstücke in der w-Ebene, und die Zuordnung der Punkte ist eine gegenseitig eindeutige, wenigstens so lange die Veränderung auf gewisse Gebiete beschränkt bleibt.

Eine solche gegenseitige Zuordnung zweier Gebiete nennt man eine Abbildung, also hier eine Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene.

Fig. 20.



Die geographischen Karten sind solche Abbildungen von Theilen der Erdoberfläche auf die Ebene der Karte.

Eine Abbildung, die durch eine Function w des complexen Arguments vermittelt wird, hat aber eine sehr bemerkenswerthe geometrische Eigenthümlichkeit. Nehmen wir drei unendlich benachbarte Punkte z, z', z'' in der z-Ebene und die entsprechenden Punkte w, w', w'' in der w-Ebene, so ist nach der Definition der Function complexen Arguments

$$(4)\qquad \frac{w' - w}{z' - z} = \frac{w'' - w}{z'' - z}$$

oder auch

$$(5) \qquad \frac{w'' - w}{w' - w} = \frac{z'' - z}{z' - z}.$$

Ist nun

$$z' - z = \varrho' e^{i\varphi'}, \qquad z'' - z = \varrho'' e^{i\varphi''},$$
$$w' - w = r' e^{i\psi'}, \qquad w'' - w = r'' e^{i\psi''},$$

so ergiebt sich aus (5)

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} e^{i(\varphi'' - \varphi')} = \frac{r''}{r'} e^{i(\psi'' - \psi')}$$

oder

$$\frac{\varrho''}{\varrho'} = \frac{r''}{r'}, \qquad \varphi'' - \varphi' = \psi'' - \psi'.$$

Hierdurch aber ist die Aehnlichkeit der beiden Dreiecke (z, z', z''), (w, w', w'') ausgedrückt. Eine Ausnahme von dieser Aehnlichkeit kann nur da eintreten, wo das Differentialverhältniss (4) Null oder unendlich wird, weil dann (5) nicht mehr aus (4) gefolgert werden kann. Wir nehmen an, dass dies immer nur in einzelnen Punkten eintritt.

Die Aehnlichkeit unendlich kleiner Dreiecke lässt auf die Aehnlichkeit unendlich kleiner, einander entsprechender Figuren überhaupt schliessen, und man nennt daher diese Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich oder auch conform.

Die Aehnlichkeit erstreckt sich natürlich im Allgemeinen nicht auf Figuren von endlicher Ausdehnung; aber die Gleichheit entsprechender Winkel ist, abgesehen von den oben erwähnten Ausnahmepunkten, allgemein.

Die Beziehung zwischen der w-Ebene und z-Ebene ist eine gegenseitige, denn wenn w eine Function des complexen Arguments z ist, so ist auch umgekehrt z eine Function des complexen Arguments w; und es ergiebt sich ein System richtiger Gleichungen, wenn man in (2) die Variablen u, v mit x, y vertauscht.

Um eine Anschauung von einer conformen Abbildung durch eine Function complexen Arguments zu erhalten, sucht man, wie es ja bei Landkarten auch geschieht, zunächst ein sogenanntes Netz zu gewinnen, d. h. man sucht die beiden Curvenschaaren in der einen Ebene auf, die den zu den Coordinatenaxen parallelen Geraden der anderen Ebene entsprechen. Hat man diese Linienschaaren in beiden Ebenen mit hinlänglicher Dichtigkeit verzeichnet, so ist es ein Leichtes, zu einer beliebig

gegebenen Figur der einen Ebene das Bild in der anderen Ebene mit beliebiger Genauigkeit einzutragen.

Nehmen wir z als Function des complexen Arguments w an, und setzen also

$$(6)\qquad z = x + yi = f(w) = f(u + iv),$$

so sind x und y reelle Functionen der reellen Variablen u, v. Ist etwa

$$(7)\qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

so erhalten wir in der xy-Ebene zwei zu einander orthogonale Curvenschaaren, wenn wir einmal $v =$ const., dann $u =$ const. setzen. Wir können also (wie in §. 37) u und v als krummlinige Coordinaten in der xy-Ebene ansehen.

Bezeichnen wir mit ds das Linienelement in der xy-Ebene, so ist

$$(8)\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = (dx + i\,dy)\,(dx - i\,dy).$$

Bezeichnen wir mit $f'(w)$ die derivirte Function von $f(w)$ und mit F die conjugirte Function von f, d. h. die Function, die aus f durch die Vertauschung von i mit $-i$ in den Coëfficienten entsteht, endlich mit z' und w' die mit z und w conjugirten Variablen $x - iy$, $u - iv$, so ist

$$z = f(w), \qquad z' = F(w'),$$

$$ds^2 = dz\,dz' = f'(w)\,F'(w')\,dw\,dw',$$

$$f'(w) = \frac{\partial x}{\partial u} + i\,\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} - i\,\frac{\partial x}{\partial v},$$

und wenn wir also

$$(9)\qquad M = f'(w)\,F'(w') = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

setzen, so folgt

$$(10)\qquad dx^2 + dy^2 = M(du^2 + dv^2).$$

Die reelle Function $\sqrt{M}$ ist die **lineare Vergrösserung** oder der Maassstab des Bildes. Er ist von einer Stelle zur anderen veränderlich, hat aber für jede Stelle des Bildes einen bestimmten Werth.

Wenn zwei Flächenstücke conform auf eine dritte abgebildet sind, so sind sie auch auf einander conform abgebildet, und daraus ergiebt sich der Satz, dass zwei **Functionen** w_1, w_2

des complexen Arguments z auch Functionen von einander sind.

Wir geben weiterhin für die conforme Abbildung einige Beispiele, müssen aber zuvor noch einige andere Punkte der Functionentheorie erörtern.

§. 47.

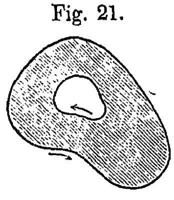
Integrale von Functionen complexen Arguments.

Wir grenzen in der xy-Ebene ein Gebiet durch eine geschlossene Curve ab, in dem die beiden Functionen u, v von x, y endlich und stetig sind, und wenden den für die Ebene specialisirten Gauss'schen Integralsatz [§. 39 (9)] an. Dadurch erhalten wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} \iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy &= \int (v\,dx + u\,dy), \\ \iint\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy &= \int (-\,u\,dx + v\,dy). \end{aligned}$$

Hierin beziehen sich die Doppelintegrale auf das Innere des abgegrenzten Gebietes, die einfachen Integrale auf dessen Begrenzung, und zwar so, dass das Gebiet im positiven Sinne umkreist wird, und dx, dy die mit Rücksicht auf das Zeichen genommenen Projectionen des Randelementes ds auf die x-Axe und die y-Axe sind. (Man sehe die Fig. 21, in der die Begrenzung beispielshalber aus zwei Stücken bestehend angenommen ist.)

Fig. 21.



Wenn nun

$$(2)\qquad w = u + iv$$

Function des complexen Arguments

$$(3)\qquad z = x + iy$$

ist, so verschwinden die beiden Flächenintegrale nach §. 46 (2), und es folgt

$$(4)\qquad \int (v\,dx + u\,dy) = 0, \quad \int (u\,dx - v\,dy) = 0.$$

Wenn die erste dieser Formeln mit i multiplicirt und zur zweiten addirt wird, so ergiebt sich:

$$\int (u + iv)(dx + i\,dy) = 0, \tag{5}$$

oder auch

$$\int w\,dz = 0, \tag{6}$$

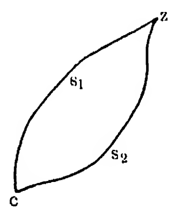
und hierin bedeutet dz den Zuwachs der Variablen z, der einem Fortschritt im positiven Sinne um das Element ds auf der Grenzcurve entspricht; w ist der Werth der Function, der irgend einem Punkte des Elementes ds entspricht. Wir haben also den Satz:

> 1. Das über die Begrenzung eines Flächenstückes genommene Integral
>
> $$\int w\,dz$$
>
> hat den Werth Null, wenn im Inneren des Flächenstückes die Function w endlich und stetig ist.

Es ist nur eine andere Ausdrucksweise für diesen Satz, die uns zu einer Definition des Integrals einer Function w zwischen zwei Grenzen führt:

Man nehme zwei Punkte c und z in der z-Ebene an, und verbinde diese beiden Punkte durch zwei beliebige Curven s_1 und s_2. Diese beiden Curven begrenzen zusammen ein Flächenstück, und wenn wir annehmen, dass in diesem Flächenstück w endlich und stetig sei, so können wir den Satz 1. darauf anwenden. Die Begrenzung setzt sich aber jetzt aus den beiden Curven s_1 und s_2 zusammen, aber so, dass die Curve s_2 in der Richtung von c nach z, s_1 in der Richtung von z nach c zu durchlaufen ist. Das Randintegral zerfällt demnach auch in zwei Theile, die einander gleich und entgegengesetzt sind. Wenn man aber in dem Integrale längs der Curve s_1 die Richtung der Integration umkehrt, so muss man, gemäss der Definition von dz gleichzeitig das Vorzeichen ändern, und folglich haben die von c nach z genommenen Integrale auf den beiden Curven s_1 und s_2 denselben Werth, den wir mit

Fig. 22.



$$\int_e^z w\,dz$$

bezeichnen. Das Integral ist also nur eine Function der Grenzen e und z, und zwar ist es, da sein Differentialquotient w von der Richtung dz unabhängig ist, eine Function des complexen Arguments z.

Es ist dabei aber darauf zu achten, dass zwei Integrationswege s_1, s_2 nur dann immer denselben Integralwerth ergeben, wenn in dem von ihnen eingeschlossenen Flächenstück kein Unstetigkeitspunkt der Function w liegt. Wir sprechen also noch den Satz aus:

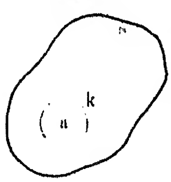
2. Das zwischen den Grenzen e und z genommene Integral

$$\int_e^z w\,dz$$

ist eine Function complexen Arguments der oberen Grenze, und ist vom Integrationswege unabhängig, so lange dieser bei seiner Veränderung nicht über einen Unstetigkeitspunkt hinweggeht.

Die Function $w = 1/(z - a)$ wird in dem Punkte a unendlich. Das Integral dieser Function, über eine den Punkt a umschliessende Linie wird daher nicht gleich Null sein. Wohl aber wird es von der Gestalt dieser Curve unabhängig sein, da w in dem von zwei solcher Curven s und k umschlossenen Ringgebiet endlich und stetig ist. Wir können also zur Bestimmung dieses Integrals für die Curve k einen Kreis mit dem Mittelpunkt a und einem beliebigen Radius r wählen. Setzen wir also für die Punkte der Kreisperipherie

Fig. 23.



$$z - a = r e^{i\varphi},$$

so ist auf der Peripherie

$$dz = i r e^{i\varphi} d\varphi = i(z - a)\,d\varphi$$

und folglich

$$(7) \qquad \int_s \frac{dz}{z - a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

§. 48.

Der Satz von Cauchy.

Wenn die Function $w = f(z)$ in einem Gebiete T mit der Begrenzung s endlich und stetig ist, und auch eine stetige Derivirte $f'(z)$ hat, so wird die Function der Variablen t

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

in demselben Gebiete endlich und stetig sein, und sie gestattet also die Anwendung des Theorems 1., §. 47, d. h. es ist das über die ganze Begrenzung s genommene Integral

$$(1) \qquad \int \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, dt = 0.$$

Hier bedeutet t die Integrationsvariable und z gilt bei der Integration als constant. Hieraus aber erhält man

$$\int \frac{f(t)}{t - z}\, dt = f(z) \int \frac{dt}{t - z},$$

und nach der Formel (7) des vorigen Paragraphen

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t - z}\, dt = f(z),$$

wo das Integral ebenfalls über s zu erstrecken ist.

Diese Formel rührt von Cauchy her. Sie gilt auch, wenn die Endlichkeit des Differentialquotienten $f'(z)$ nur im Allgemeinen, d. h. mit etwaiger Ausnahme einzelner Punkte vorausgesetzt wird, und zeigt alsdann, dass solche Ausnahmepunkte bei einer stetigen Function von complexem Argument nicht vorkommen können. Denn da der Punkt z ein innerer ist, so bleibt in dem Integral (2) die Function unter dem Integralzeichen durchaus endlich, und die Differentiation des Integrals nach z kann unter dem Integralzeichen ausgeführt werden. Es ergiebt sich so für die Differentialquotienten von jeder Ordnung:

$$(3) \qquad \frac{d f(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)\, dt}{(t - z)^2},$$

$$(4) \qquad \frac{d^n f(z)}{dz^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2\pi i} \int \frac{f(t)\, dt}{(t - z)^{n+1}}.$$

I. **Eine Function complexen Argumentes, die in einem Gebiete endlich und stetig ist, hat also in diesem Gebiete endliche und stetige Derivirte jeder Ordnung.**

Aus (2) ergiebt sich, wenn z und z' irgend zwei Punkte des Gebietes T sind

$$(5) \qquad f(z) - f(z') = \frac{z - z'}{2\pi i} \int \frac{f(t)\,dt}{(t - z)(t - z')}.$$

Nehmen wir nun an, dass das Gebiet T die ganze unendliche Ebene umfasst, und dass die Function $f(t)$ auch für ein unendliches t dem absoluten Werthe nach unter einer endlichen Grenze bleibt, so können wir in (5)

$$t = Re^{\varphi i}, \qquad dt = Re^{\varphi i}\, i\, d\varphi$$

setzen und R ins Unendliche wachsen lassen, d. h. wir können die Integration über einen unendlich grossen Kreis erstrecken. Dann wird aber das Integral auf der rechten Seite von (5) gleich Null, weil R im Zähler nur in der ersten, im Nenner in der zweiten Potenz vorkommt und die Integrationsgrenzen 0 und 2π endlich sind, und es folgt $f(z) = f(z')$. Damit ist der Satz bewiesen:

II. **Eine Function complexen Argumentes, die in der ganzen Ebene endlich und stetig ist, und auch im Unendlichen nicht unendlich wird, ist nothwendig eine Constante, und wenn sie im Unendlichen verschwindet, so ist sie identisch Null.**

Es sei jetzt das Gebiet T als ein um den Nullpunkt beschriebener Kreis mit dem Radius c angenommen. Dann ist in dem Integral (2) der absolute Werth von t fortwährend gleich c, während der von z, so lange z ein innerer Punkt ist, kleiner als c ist. Der absolute Werth von z/t ist daher ein echter Bruch, und es ist nach der bekannten Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \frac{z^2}{t^3} + \cdots = \sum_{n}^{0, \infty} \frac{z^n}{t^{n+1}}.$$

Da sich nun in dieser unendlichen Reihe die Integration gliedweise ausführen lässt, so folgt aus (2)

$$(6) \qquad f(z) = \sum_{n}^{0, \infty} A_n z^n,$$

wenn

(7) $$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}}$$

gesetzt ist.

Es lässt sich also die Function $f(z)$ in eine Reihe entwickeln, die nach Potenzen von z fortschreitet, und diese Reihe ist convergent in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und dessen Peripherie bis an den nächstgelegenen Unstetigkeitspunkt von $f(z)$ hinanreicht. Denn so weit kann das kreisförmige Gebiet T ausgedehnt werden. Dieser Kreis wird der Convergenzkreis genannt.

Die Entwickelung (6) ist nichts anderes als die Mac-Laurin'sche Reihe, und ihre Coëfficienten A_n lassen sich mit Hülfe der Relation (4) auf die bekannte Form bringen:

(8) $$A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,f^{(n)}(0).$$

Setzt man in dem Integral (7)

$$t = re^{i\varphi}, \quad dt = it\,d\varphi,$$

so kann man die A_n auch in die Form setzen

(9) $$A_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\varphi})\,e^{-in\varphi}\,d\varphi.$$

Setzen wir noch

$$z = r'e^{i\vartheta},$$

so wird das allgemeine Glied der Reihe (6)

(10) $$U_n = \left(\frac{r'}{r}\right)^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{i\varphi})\,e^{in(\vartheta-\varphi)}\,d\varphi,$$

und dieser Ausdruck zeigt, wenn man sich auf den Satz stützt, dass der absolute Werth einer Summe niemals grösser ist als die Summe der absoluten Werthe der Summanden, dass die Convergenz der Potenzreihe (6) für jeden inneren Punkt von der Art einer geometrischen Reihe ist, d. h. so, dass es einen echten Bruch ε giebt, für den $\varepsilon^{-n} U_n$ mit unendlich wachsendem n nicht unendlich wird, und dass also das Product $n^k U_n$ für jedes noch so grosse k mit unendlich wachsendem n gegen Null convergirt.

Setzen wir $w = f(z) - A_0$, so ergiebt sich aus (6)

(11) $$w = A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots,$$

und durch diese convergente Entwickelung wird jedem Punkte in

der Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene ein Punkt in der Umgebung des Nullpunktes in der w-Ebene zugeordnet. Dies gilt auch umgekehrt, wenn A_1 von Null verschieden, also der Differentialquotient dw/dz für $z = 0$ nicht Null ist. Dann entspricht jedem Punkte in der Umgebung des Nullpunktes der w-Ebene auch nur ein Punkt in der Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene und man erhält aus (11) eine Reihenentwickelung in der Form

(12) $$z = B_1 w + B_2 w^2 + B_3 w^3 + \cdots$$

Wenn aber der Coëfficient A_1 verschwindet, dann erhalten wir aus (11)

$$\sqrt{w} = z\sqrt{A_2 + A_3 z + \cdots},$$

und wir können also, wenn A_2 von Null verschieden ist, $\sqrt{A_2 + A_3 z + \cdots}$ nach ganzen Potenzen von z entwickeln. So erhalten wir:

(13) $$\sqrt{w} = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots,$$

worin $a_1 = \sqrt{A_2}$ ist, und wenn also A_2 von Null verschieden ist, so können wir hieraus eine Entwickelung für z von der Form

(14) $$z = b_1 \sqrt{w} + b_2 \sqrt{w}^2 + b_3 \sqrt{w}^3 + \cdots$$

ableiten. Setzen wir

$$w = \varrho e^{i\varphi}, \quad \sqrt{w} = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}},$$

so sind ϱ und φ Polarcoordinaten in der Ebene, und die zweite dieser Formeln zeigt, dass $\sqrt{w}$ sein Vorzeichen ändert, wenn φ um 2π wächst, wenn man also einen einmaligen Umkreis um den Nullpunkt in der w-Ebene macht.

Es ist also z eine zweiwerthige Function von w.

Einem Winkel in der w-Ebene, der seine Spitze im Nullpunkt hat, entspricht ein doppelt so grosser Winkel in der z-Ebene.

In diesem Falle, der also dadurch gekennzeichnet ist, dass im Nullpunkt dw/dz verschwindet, tritt in dem Nullpunkt selbst eine Verletzung der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilchen ein.

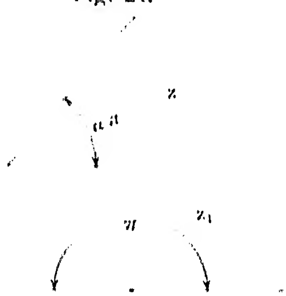
Um auch in diesem Falle eine eindeutige Beziehung zweier Flächen auf einander zu erhalten, muss man sich die w-Ebene durch zwei Blätter überdeckt denken, die aber beim Umkreisen des Nullpunktes ähnlich wie die Umgänge einer Schraubenfläche gegenseitig in einander übergehen, wobei das eine Blatt das andere durchdringen muss. Solche Flächen heissen nach Rie-

mann **Verzweigungsflächen** und die Punkte, um die sie sich winden, **Verzweigungspunkte**. Die Linien, in denen sich die beiden Flächen gegenseitig durchsetzen, werden auch **Verzweigungsschnitte** genannt.

Verzweigungspunkte treten immer dann nothwendig auf, wenn es sich um die conforme Abbildung zweier begrenzter Flächen auf einander handelt, von denen die eine in der Begrenzung eine Ecke hat, während der entsprechende Theil der Begrenzung der anderen glatt verläuft.

Um diesen wichtigen Umstand etwas genauer darzulegen, nehmen wir an, dass die Begrenzung einer Figur in der z-Ebene im Punkte $z = 0$ eine Ecke habe, in der die beiden Begrenzungsstücke unter dem Winkel $\alpha\pi$ zusammenstossen, so dass dieser Winkel im Inneren der abzubildenden Fläche liegt. Führen wir eine neue Variable z_1 ein durch die Substitution $z = z_1^\alpha$, so wird, während z_1 einen Halbkreis um den Nullpunkt beschreibt, z einen Bogen von der Grösse $\alpha\pi$ beschreiben, und es ist also die Ecke in der z-Ebene auf ein glatt begrenztes Stück in der z_1-Ebene conform abgebildet. Soll nun diese Ecke in der w-Ebene gleichfalls auf ein den Nullpunkt umgebendes, glatt begrenztes Stück abgebildet werden, so wird z_1 eine eindeutige Function von w sein, und sich also in der Form

Fig. 24.



$$(15) \qquad z_1 = w(a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots)$$

entwickeln lassen. Hieraus aber folgert man für z eine Entwickelung von der Form

$$(16) \qquad z = w^\alpha (b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots),$$

wenn die Coëfficienten $b_0, b_1, \ldots$ Constanten sind, von denen b_0 von Null verschieden ist.

§. 49.

Stetige Fortsetzung.

Macht man in der Formel §. 48 (6) die Substitution $z - c$ für z und ersetzt dann wieder $f(z - c)$ durch $f(z)$, so über-

tragen sich die im vorigen Paragraphen für den Nullpunkt abgeleiteten Resultate auf einen beliebigen Punkt c. Es ergiebt sich eine Entwickelung von der Form

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-c)^n,$$

in der A_n die Bedeutung hat

$$(2) \qquad A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(c),$$

und diese Reihe convergirt in einem aus dem Punkte c beschriebenen Kreise, der bis zur nächsten Unstetigkeitsstelle der Function $f(z)$ reicht.

Nimmt man in diesem Kreise einen zweiten Punkt c' an, so kann man eine Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $z - c'$ aufstellen, deren Convergenzkreis möglicherweise über den der Reihe (1) hinausreicht, und kann so die Function $f(z)$ durch Potenzreihen stetig fortsetzen. Es kann dabei der Fall vorkommen, dass die Convergenzkreise immer kleiner und kleiner werden, und dass man mit dieser stetigen Fortsetzung nicht über ein gewisses Gebiet hinauskommt. Hat aber die Function $f(z)$ in einem endlichen Theil der Ebene nur eine endliche Zahl von Unstetigkeitspunkten, so tritt dieser Fall nicht ein, und man kann die Function $f(z)$ über die ganze Ebene stetig fortsetzen. Freilich können sich dabei für dasselbe Gebiet von z verschiedene Werthe von $f(z)$ ergeben, je nach dem Wege, auf dem man die stetige Fortsetzung in ein solches Gebiet geführt hat.

Wenn die Function $f(z)$ in einer durch den Punkt c gehenden Linie den Werth 0 hat, so haben auch alle ihre Differentialquotienten in c den Werth 0, und die Formel (1) zeigt, dass die Function $f(z)$ in dem ganzen Convergenzkreise um c den Werth 0 hat. Dasselbe gilt auch für die durch stetige Fortsetzung entstandenen Gebiete, und wir erhalten den Satz:

> Eine Function von z, die in einem Linienstück verschwindet, muss identisch verschwinden, so weit sie stetig ist.

In derselben Weise wie die Werthe $z = c$ lässt sich bei Functionen, die für $z = \infty$ noch endlich und stetig sind, dieser Werth behandeln, und man kommt auf den früheren Fall zurück durch die Substitution $z_1 = 1/z$. Man erhält also in diesen Fällen für

eine Function $f(z)$ eine Entwickelung nach fallenden Potenzen von z:

$$f(z) = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \cdots,$$

die ausserhalb eines Kreises mit hinlänglich grossen Radien convergirt. Man spricht aus diesem Grunde in der Functionentheorie von einem unendlich fernen Punkte und man kann diese Ausdrucksweise auch der Anschauung zugänglich machen, wenn man als Träger der Werthe von z nicht eine Ebene, sondern eine Kugelfläche betrachtet, die man etwa durch stereographische Projection aus der Ebene ableitet.

§. 50.

Beispiel I. Reciproke Radien.

Wenn $z = f(w)$ eine ganze lineare Function von w ist, und $z = x + iy$, $w = u + iv$ gesetzt wird, dann werden x und y lineare Functionen von u und v, und es entsprechen constanten Werthen von u und v zwei Schaaren auf einander senkrechter gerader Linien. Die Abbildung ist hier eine vollkommen ähnliche, die verbunden ist mit einer Drehung. Auf diesen einfachen Fall gehen wir hier nicht näher ein. Es sei zunächst

$$(1) \qquad z = \frac{1}{w}, \quad x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2},$$
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2},$$

folglich haben wir

$$(2) \qquad \begin{aligned} v(x^2 + y^2) + y &= 0, \\ u(x^2 + y^2) - x &= 0. \end{aligned}$$

Die u-Curven und die v-Curven sind hier zwei Schaaren von Kreisen, deren Mittelpunkte auf der y-Axe und auf der x-Axe liegen, und die alle durch den Coordinatenanfangspunkt gehen. Die Kreise jeder Schaar berühren einander (Fig. 25). Es sind hier die ganzen Ebenen z und w eindeutig auf einander bezogen. Dem unendlich fernen Punkte der einen Ebene entspricht der Nullpunkt der anderen.

Dieser Abbildung lässt sich eine andere geometrische Deutung geben. Haben wir einen Kreis mit dem Radius c, so können

wir einen inneren Punkt z und einen äusseren z_1 einander zuordnen, die auf dem gleichen Radius so zu einander liegen, dass der Kreisradius c die mittlere Proportionale zwischen ihren beiden Abständen r, r_1 vom Mittelpunkte ist. Nehmen wir $c = 1$ an, so wird also $rr_1 = 1$. Man construirt den Punkt z_1, wenn man durch z die kleinste Sehne legt und in ihren Endpunkten die Kreistangenten zieht, die sich in dem Punkte z_1 schneiden (Fig. 26). Auf diese Weise wird die ganze Ebene z auf sich selbst abgebildet, und

Fig. 25.

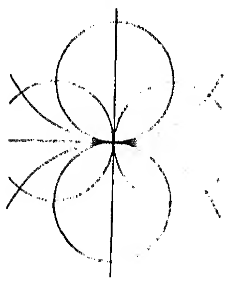


Fig. 26.

zwar so, dass jeder innere Punkt einem äusseren und jeder äussere einem inneren entspricht. Der Nullpunkt und der Unendlichkeitspunkt entsprechen einander.

Diese Abbildung heisst die **Abbildung durch reciproke Radien.**

Man kann nun noch eine dritte Abbildung hinzufügen, indem man jedem Punkte z_1 den in Bezug auf die x-Axe symmetrisch gelegenen Punkt z_1' entsprechen lässt. Die Abbildungen z_1 und z_1' entsprechen dann einander wie das Original seinem Spiegelbilde, d. h. sie gehen durch Umklappen um die x-Axe in vollständige Deckung über. Setzen wir aber

$$z = x + yi, \quad z_1 = x_1 + y_1 i, \quad z_1' = x_1 - y_1 i,$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta, & x_1 &= r_1\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\vartheta, & y_1 &= r_1\sin\vartheta, \end{aligned}$$

und folglich

$$zz_1' = 1 \tag{3}$$

und es stimmt also die Abbildung von z auf z_1' mit der durch (1) vermittelten Abbildung der w-Ebene auf die z-Ebene überein. Es folgt daraus, dass diese Bilder in den kleinsten Theilen ähnlich sind, und daraus ergiebt sich weiter, dass die Abbildung

durch reciproke Radien gleichfalls in den kleinsten Theilen ähnlich, aber spiegelbildlich ähnlich ist.

§. 51.

Beispiel II. Abbildung durch lineare gebrochene Functionen.

Die Function, die wir im vorigen Paragraphen betrachtet haben, ist ein specieller Fall der linearen gebrochenen Function

$$(1) \qquad w = a\,\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

worin a, α, β reelle oder imaginäre Constante bedeuten. Bei der Abbildung durch diese Function entspricht jedem Kreis in der w-Ebene ein Kreis in der z-Ebene und umgekehrt, wobei jedoch auch gerade Linien als Grenzfälle von Kreisen auftreten können. Um sich hiervon zu überzeugen, bedenke man, dass die Gleichung eines Kreises in der $u\,v$-Ebene als eine lineare Gleichung zwischen den drei Variablen

$$u^2+v^2, \quad u, \quad v$$

und folglich auch, wenn w und w' conjugirt imaginär sind, als lineare Gleichung zwischen

$$ww', \quad w, \quad w'$$

dargestellt werden kann, etwa in der Form

$$(2) \qquad A\,ww' + B\,w + B'\,w' + C = 0.$$

Hierin kann A reell angenommen werden, und wir setzen es nur darum nicht gleich 1, weil die Gleichung (2) auch für die gerade Linie gelten soll, wenn man $A = 0$ setzt. Dann sind B, B' conjugirt imaginär und C ist reell. Macht man aber in (2) die Substitution (1), indem man noch

$$w' = a'\,\frac{z'-\alpha'}{z'-\beta'}$$

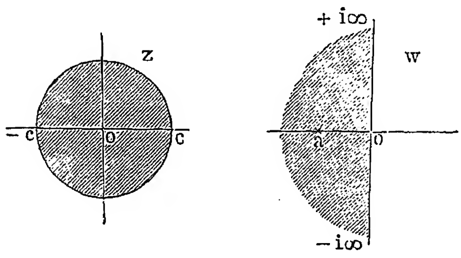
setzt, so erhält man eine Gleichung von derselben Form wie (2) zwischen den Variablen zz', z, z', die also wieder einen Kreis in der z-Ebene darstellt.

Die Constanten a, α, β lassen sich so bestimmen, dass drei Bedingungen befriedigt werden, z. B. so, dass drei gegebenen

Punkten der einen Ebene drei gegebene Punkte der anderen entsprechen sollen.

Als Beispiel nehmen wir einen Kreis mit dem Radius c um den Nullpunkt in der z-Ebene, und verlangen, dass die Kreisperipherie der imaginären Axe und das Innere der Kreisfläche der Halbebene der negativen u in der w-Ebene entsprechen soll. Damit ist die Substitution (1) noch nicht vollkommen bestimmt, sondern es bleiben noch drei reelle Constanten verfügbar. Um diese zu bestimmen, wollen wir festsetzen, dass der Mittelpunkt des Kreises, also der Punkt $z = 0$, dem Punkte $w = -a$ entsprechen soll, worin a eine positive Constante ist; sodann soll dem Punkte der Kreisperipherie $z = c$ der Punkt $w = 0$ und dem Punkte $z = -c$ der Punkt $w = \pm i\infty$ entsprechen, dann erhalten wir

Fig. 27.



$$(3) \qquad w = a\,\frac{z - c}{z + c},$$

und diese Function giebt also die conforme Abbildung einer Kreisfläche in der z-Ebene auf eine w-Halbebene, bei der die Punkte der einen Fläche denen der anderen gegenseitig eindeutig entsprechen, und bei der entsprechende Punkte immer stetig mit einander fortrücken.

§. 52.

Beispiel III. Confocale Kegelschnitte.

Wir betrachten noch als letztes Beispiel die Function

$$(1) \qquad z = \cos w,$$

worin die Function cosinus für ein complexes Argument durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{gathered} \cos(u + iv) = \cos u \cos iv - \sin u \sin iv \\ \cos iv = \frac{e^v + e^{-v}}{2}, \quad \sin iv = i\,\frac{e^v - e^{-v}}{2} \end{gathered}$$

definirt ist. Es ergiebt sich hieraus

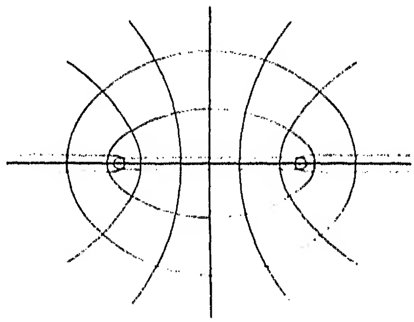
$$
\begin{aligned}
&(3) \qquad & x &= \cos u \cos i v, \\
& & y &= i \sin u \sin i v,
\end{aligned}
$$

und wenn man u und v eliminirt, so folgt:

$$
\begin{aligned}
&(4) \qquad & \frac{x^2}{\cos^2 i v} - \frac{y^2}{\sin^2 i v} &= 1, \\
& & \frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} &= 1.
\end{aligned}
$$

Es entspricht also einem constanten v eine Ellipse, deren Brennpunkte die Coordinaten $x = \pm 1$, $y = 0$ haben. Einem constanten u entspricht eine Hyperbel mit denselben Brennpunkten; u und v sind elliptische Coordinaten in der Ebene. Um alle Werthe von x, y und jeden nur einmal zu erhalten, hat man v von 0 bis ∞ und u von $-\pi$ bis $+\pi$ gehen zu lassen. Wenn nämlich v von 0 bis unendlich geht, so erhält man eine Schaar die ganze Ebene einfach überziehender Ellipsen, deren erste für $v = 0$ sich auf die Verbindungsstrecke der beiden Brennpunkte $y = 0$, $x = \pm 1$ zusammenzieht; und wenn u von $-\pi$ bis $+\pi$ geht, läuft bei constantem v der Punkt x, y auf einer dieser Ellipsen gerade einmal herum. Zwei Werthe u und $u - \pi$ entsprechen den beiden Aesten derselben Hyperbel. Liegt u zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, so ist x positiv, und man erhält dann den den Brennpunkt $x = +1$, $y = 0$ umschliessenden Ast.

Fig. 28.



Siebenter Abschnitt

Differentialgleichungen.

§. 55.

Definition und Eintheilung.

Ist die Grösse y eine Function von einer oder mehreren unabhängigen Veränderlichen, so kann der Zusammenhang mit diesen unabhängigen Veränderlichen in verschiedener Weise ausgedrückt sein. Der einfachste Fall ist der, dass die unabhängigen Variabeln und die Function durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, in welcher ausser ihnen nur constante Grössen vorkommen. Eine solche Gleichung nennt man eine *endliche Gleichung* zwischen den Veränderlichen, und es soll mit diesem Namen ausgesprochen sein, dass in der Gleichung nur endliche Grössen, also keine Differentiale, auch keine Verhältnisse von Differentialen vorkommen. Im Gegensatze zu den endlichen Gleichungen zwischen den veränderlichen Grössen stehen die *Differentialgleichungen*.

Unter einer *Differentialgleichung* verstehen wir eine Gleichung, welche ausser den unabhängigen Veränderlichen und der Function noch einen oder mehrere Differentialquotienten der Function enthält.

Wir unterscheiden *gewöhnliche* Differentialgleichungen und *partielle* Differentialgleichungen. Wird y als Function von nur einer Variablen x angesehen und kommen demnach in der Differentialgleichung nur die nach dieser einen Variablen x genommenen Differentialquotienten vor, so heisst die Gleichung eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Soll dagegen die Function von mehreren Variabeln abhängig sein, und enthält

die Differentialgleichung die partiellen Differentialquotienten nach mehreren Variabeln, so wird die Gleichung eine partielle Differentialgleichung genannt.

Wir theilen die Differentialgleichungen (die gewöhnlichen wie die partiellen) in verschiedene Ordnungen ein. Eine Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung ist eine solche, in welcher Differentialquotienten von der n^{ten} Ordnung und keine höheren vorkommen.

Wir unterscheiden lineare Differentialgleichungen und nichtlineare. In einer linearen Differentialgleichung kommen die Function y und ihre Differentialquotienten nur in erster Potenz vor und keine Producte der Function mit den Differentialquotienten oder der Differentialquotienten unter einander. Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist danach von der Form

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X,$$

worin $a_0, a_1, \ldots a_n, X$ Functionen von x allein oder auch constante Grössen sind. Ist $X = 0$, so heisst die lineare Differentialgleichung homogen.

Lineare Differentialgleichungen.

§. 54.

Die willkürlichen Integrationsconstanten. Das vollständige Integral.

Um einen ersten Einblick in die Natur der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu erlangen, gehen wir aus von einer endlichen Gleichung zwischen x und y, die ausser diesen veränderlichen Grössen noch eine gewisse Anzahl von Constanten enthält. Durch n mal wiederholte Differentiation leiten wir aus dieser primitiven Gleichung n neue Gleichungen her, von denen die erste keinen höheren Differentialquotienten als den ersten, die zweite keinen höheren als den zweiten, u. s. f., die letzte keinen höheren als den n^{ten} enthält. Aus dem so gewonnenen Systeme von n Gleichungen und der primitiven

Gleichung können wir n constante Grössen eliminiren. Das Resultat wird eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung sein, welche n constante Grössen weniger enthält als die primitive Gleichung, aus der sie hervorgegangen.

Durch die primitive Gleichung ist y als Function von x so bestimmt, dass die Differentialgleichung befriedigt wird. Eine Function y, die der Differentialgleichung genügt, heisst eine *Lösung* (oder auch ein Integral) der Differentialgleichung, und die Auffindung der Lösung heisst die *Integration der Differentialgleichung.*

Aus der vorher angestellten Betrachtung geht hervor, dass eine endliche Gleichung zwischen x und y, die einer Differentialgleichung n^{ter} Ordnung Genüge leistet, n Constanten enthalten kann, die in der Differentialgleichung nicht vorkommen. Diese n Constanten sind völlig unbestimmt, wenn nichts als die Differentialgleichung gegeben ist. Man nennt sie daher die *willkürlichen Constanten des Integrals*, und die endliche Gleichung heisst das *vollständige Integral* der vorgelegten Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung, wenn wirklich n willkürliche Constanten darin vorkommen, die sich nicht auf eine geringere Anzahl reduciren lassen. Im Gegensatze dazu nennt man eine endliche Gleichung zwischen x und y, die der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung genügt, ein *particulares Integral*, wenn sie weniger als n willkürliche Constanten enthält.

§. 55.

Homogene lineare Differentialgleichungen.

Wir betrachten nun eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(1) \qquad a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0.$$

Es sei $y = Y$ ein *particulares Integral.* Dann wird auch $y = cY$ ein solches sein. Denn nach der Voraussetzung wird die Differentialgleichung erfüllt, wenn man statt y dann Y schreibt, also

$$(2) \qquad a_0 \frac{d^n Y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n Y = 0.$$

Wird nun aber cY für y gesetzt, so kommt auf der linken Seite nur noch der für alle Glieder gemeinschaftliche Factor c hinzu, so dass auch jetzt deren Summe verschwindet.

Sind ferner $y = Y_1$ und $y = Y_2$ particulare Integrale, so kann man daraus ein neues Integral

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2$$

bilden. Dieses neue particulare Integral ist dann von Y_1 und Y_2 nicht unabhängig, sondern aus ihnen linear zusammengesetzt. Dagegen heisst ein Integral Y_3 von Y_1 und Y_2 unabhängig, wenn es sich nicht in die Form $c_1 Y_1 + c_2 Y_2$ bringen lässt. Ueberhaupt werden k Integrale $Y_1, Y_2, \dots Y_k$ der homogenen linearen Differentialgleichung von einander unabhängig genannt, wenn sich keine constanten Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$, die nicht alle verschwinden, so bestimmen lassen, dass sie der Gleichung

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_k Y_k = 0$$

genügen.

Man sieht nun leicht, dass eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung nicht mehr als n unabhängige particulare Integrale haben kann. Denn sonst könnte man jedes mit einer willkürlichen Constanten multipliciren und erhielte durch Addition der Producte ein neues Integral, das mehr als n willkürliche Constanten enthielte [1]).

Hat man aber n von einander unabhängige particulare Integrale gefunden, so ist

$$y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_n Y_n \tag{3}$$

das vollständige Integral der homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, und $c_1, c_2, \dots c_n$ sind willkürliche Constanten. Daraus lässt sich jedes particulare Integral

---

[1]) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Functionen $Y_1, Y_2, \dots Y_m$ linear unabhängig sind, ist, wie sich leicht zeigen lässt, die, dass die Determinante

$$\sum \pm Y_1 \frac{dY_2}{dx} \frac{d^2 Y_3}{dx^2} \cdots \frac{d^{m-1} Y_m}{dx^{m-1}}$$

von Null verschieden ist. Hätte man aber $n+1$ unabhängige Integrale $Y_1, Y_2, \dots Y_{n+1}$ der Differentialgleichung (2), so wäre

$$a_0 \frac{d^n Y_\nu}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y_\nu}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n Y_\nu = 0$$

für $\nu = 1, 2, \dots n+1$, und die Determinante dieses Gleichungssystemes wäre von Null verschieden. Diese Gleichungen könnten also nur befriedigt sein, wenn alle Coëfficienten $a_0, a_1, \dots a_n$ gleich Null wären.

herleiten, indem man den Constanten bestimmte Werthe beilegt.

Wenn ein particulares Integral als bekannt vorausgesetzt wird, so lässt sich dadurch die Auffindung eines weiteren auf die Integration einer Differentialgleichung derselben Form, aber von niedrigerer Ordnung, und auf eine Quadratur zurückführen.

Wenn nämlich Y wie oben ein particulares Integral der Differentialgleichung (1) ist, so führe man eine neue unbekannte Function v ein und setze

$$y = Y \int v\, dx. \tag{4}$$

Differentiirt man nun (4) wiederholt, so folgt

$$
\begin{aligned}
y &= Y \int v\, dx, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dY}{dx} \int v\, dx + Y v, \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 Y}{dx^2} \int v\, dx + 2 \frac{dY}{dx} v + Y \frac{dv}{dx}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{5}
$$

worin die Differentiation bis zur n^{ten} Ordnung fortzusetzen ist.

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$ multiplicirt und addirt, so erhält man, wenn man die von Y befriedigte Gleichung (2) berücksichtigt, auf der rechten Seite einen Ausdruck, in dem das $\int v\, dx$ nicht mehr vorkommt, der die Function v und seine $n - 1$ ersten Differentialquotienten linear und homogen enthält, und der verschwinden muss, wenn y eine Lösung von (1) sein soll. Es ist daher die unbekannte Function v durch eine Differentialgleichung derselben Form wie (1), aber nur von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt.

Nehmen wir $n = 2$ an, so lässt sich diese lineare Differentialgleichung, wie überhaupt jede lineare Differentialgleichung erster Ordnung, allgemein integriren, und daher ist die vollständige Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung auf Quadraturen zurückgeführt, wenn ein particulares Integral gefunden ist.

Nehmen wir, um dies näher darzulegen, die gegebene Differentialgleichung in der Form an

von v

$$Y \frac{dv}{dx} + v\left(2 \frac{dY}{dx} + aY\right) = 0. \tag{7}$$

Dividirt man durch Yv, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{d \log Y^2 v}{dx} + a = 0$$

oder:

$$Y^2 v = e^{-\int a\,dx}.$$

Hiernach wird aber das allgemeine Integral von (6)

$$y = Y \int \frac{e^{-\int a\,dx}\,dx}{Y^2}, \tag{8}$$

und die Integrationsconstanten sind die beiden additiven Constanten der Quadraturen.

§. 56.

Homogene lineare Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten.

Es sei die homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung gegeben:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0, \tag{1}$$

worin $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n$ reelle constante Grössen sein sollen. Wir können leicht particulare Integrale finden. Setzen wir z. B.

$$y = e^{\alpha x}$$

mit constantem α, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha e^{\alpha x}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}, \quad \cdots \frac{d^n y}{dx^n} = \alpha^n e^{\alpha x}.$$

Führen wir diese Werthe in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich

$$e^{\alpha x}(a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n) = 0.$$

Dies kann nicht anders der Fall sein, als wenn die Klammergrösse $= 0$ wird. Die constante Grösse α ist also eine Wurzel der Gleichung

(2) $$\varphi(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0.$$

Wir bezeichnen die n Wurzeln der Gleichung mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ und betrachten zunächst den Fall, dass sie sämmtlich von einander verschieden sind. Dann haben wir n von einander unabhängige particuläre Integrale der Differentialgleichung, nämlich

$$e^{\alpha_1 x}, \; e^{\alpha_2 x}, \ldots e^{\alpha_n x}.$$

Das vollständige Integral ist demnach

(3) $$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \cdots + c_n e^{\alpha_n x}.$$

Hat die Gleichung n^{ten} Grades, welcher α genügen muss, imaginäre Wurzeln, so kommen diese immer paarweise conjugirt vor, d. h. die eine ist von der Form $\mu + \lambda i$, die andere von der Form $\mu - \lambda i$. Es seien z. B. α_1 und α_2 solche conjugirt imaginäre Wurzeln

$$\alpha_1 = \mu + \lambda i$$
$$\alpha_2 = \mu - \lambda i,$$

dann ergiebt sich

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} = e^{\mu x}(c_1 e^{\lambda i x} + c_2 e^{-\lambda i x})$$
$$= e^{\mu x}[(c_1 + c_2)\cos \lambda x + (c_1 - c_2) i \sin \lambda x].$$

Da nun c_1 und c_2 willkürliche Constanten sind, so können wir dafür zwei andere einführen, indem wir setzen

$$c_1 + c_2 = k_1$$
$$(c_1 - c_2) i = k_2.$$

Dadurch erhalten wir

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} = e^{\mu x}(k_1 \cos \lambda x + k_2 \sin \lambda x).$$

Das eben angewandte Verfahren erleidet eine Modification, wenn die Gleichung in α nicht lauter verschiedene Wurzeln hat. Man erhält die Lösung in diesem Falle am einfachsten auf folgendem Wege:

Wir bezeichnen die linke Seite der Differentialgleichung (1) symbolisch mit $D(y)$, setzen also

(4) $$D(y) = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y.$$

$$D(e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}\varphi(\alpha),$$

α) als ganze Function n^{ten} Grades von α durch (2) t. Wenn wir nun die Formel (5) wiederholt nach α ren, wobei die derivirten Functionen von $\varphi(\alpha)$ mit (α) ... bezeichnet sind, so erhält man, wenn man be-ss man die Reihenfolge der Differentiation nach x und rtauschen, also

$$\frac{\partial^\nu}{\partial\alpha^\nu} D(e^{\alpha x}) = D\left(\frac{\partial^\nu e^{\alpha x}}{\partial\alpha^\nu}\right) = D(x^\nu e^{\alpha x})$$

rf:

$$D(x e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)],$$
$$D(x^2 e^{\alpha x}) = e^{\alpha x}[x^2\varphi(\alpha) + 2x\varphi'(\alpha) + \varphi''(\alpha)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

nn α eine $m$fache Wurzel der Gleichung $\varphi = 0$, so $= 0$, $\varphi'(\alpha) = 0$, ..., $\varphi^{(m-1)}(\alpha) = 0$, und die Glei-6) zeigen unmittelbar, dass man für eine solche Wurzel unabhängige particulare Integrale erhält:

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x},\ x^2 e^{\alpha x},\ \ldots\ x^{m-1} e^{\alpha x}.$$

llen also die Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$ in Gruppen m_1,... unter einander gleicher, so ist $n = m + m_1 + \cdots$, llgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) ist

$$y = f(x)e^{\alpha x} + f_1(x)e^{\alpha_1 x} + \cdots,$$

), $f_1(x)$, ... willkürliche ganze Functionen der Grade $\iota_1 - 1$, ... sind, deren Coëfficienten, n an der Zahl, die ten Constanten der Integration sind.

§. 57.

endung. Schwingungen einer Magnetnadel.

wollen als Beispiel die folgende Differentialgleichung rdnung betrachten

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\varepsilon\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0,$$

und n positive Constanten sind. Diese Gleichung kommt dungen häufig vor. Sie drückt z. B. die Schwingungen gnetnadel aus, wenn y die als klein vorausgesetzte Ab-

lenkung aus der Gleichgewichtslage und x die Zeit bedeutet. Es ist dann angenommen, dass auf die Nadel eine mit y proportionale Richtkraft und eine mit der Geschwindigkeit dy/dx proportionale, der Bewegung stets entgegengesetzte Dämpfung einwirken.

Die quadratische Gleichung für α_1, α_2 wird hier

(2) $$\alpha^2 + 2\varepsilon\alpha + n^2 = 0,$$

wenn wir zunächst $\varepsilon = 0$ annehmen, so wird $\alpha = \pm i n$, und die allgemeine Lösung von (1) ist

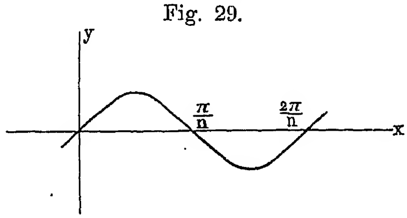
(3) $$y = A \sin n x + B \cos n x,$$

wofür man auch

(4) $$y = A \sin n(x - a)$$

setzen kann, wenn A und a die Integrationsconstanten sind. y ist hier eine rein periodische Function von x. Der Coëfficient A (positiv genommen) heisst die Amplitude der Schwingung. Die Periode ist $T = 2\pi/n$ und wird, wenn x die Zeit bedeutet, die Schwingungsdauer genannt. Die Constanten A, a kann man bestimmen, wenn für einen speciellen Werth von x, etwa für $x = 0$, die Werthe von y und von dy/dx gegeben sind. Für $x = a$ ist $y = 0$, und wenn wir also den Fall der schwingenden Magnetnadel im Auge behalten, so ist a der Zeitpunkt, wo y durch die Gleichgewichtslage geht. Nehmen wir x, y als rechtwinklige Coordinaten an, so wird y durch eine Sinuslinie dargestellt (Fig. 29).

Fig. 29.



Wenn ε von Null verschieden ist, so sind zwei (oder drei) Fälle zu unterscheiden. Die Wurzeln von (2) sind nämlich

$$\alpha = -\varepsilon \pm i\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}.$$

Es sei $n > \varepsilon$, also die beiden Werthe von α imaginär. Die allgemeine Lösung kann dann, wenn

$$n' = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$$

gesetzt wird, in der Form dargestellt werden

$$y = A e^{-\varepsilon x} \sin n'(x - a),$$

oder, wenn man die willkürliche Constante $a = 0$ annimmt:

(5) $$y = A e^{-\varepsilon x} \sin n' x.$$

Man erhält die Maxima und Minima von y aus der Gleichung $dy/dx = 0$, also aus

(6) $$e^{-\varepsilon x}(n' \cos n'x - \varepsilon \sin n'x) = 0,$$

und wenn man einen Winkel φ einführt, der durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varepsilon}{n'}$$

definirt ist, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, und um so kleiner ist, je kleiner ε ist, so sind die positiven Wurzeln der Gleichung (6)

$$n'x_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$n'x_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi,$$

$$n'x_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi + 2\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die zugehörigen Werthe von y erhält man aus (5), also die äussersten Lagen, wo die Magnetnadel ihre Bewegung umkehrt:

$$y_0 = A e^{-\varepsilon x_0} \cos \varphi,$$

$$-y_1 = A e^{-\varepsilon x_1} \cos \varphi,$$

$$y_2 = A e^{-\varepsilon x_2} \cos \varphi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und daraus, da $n'(x_1 - x_0) = n'(x_2 - x_1) = \cdots = \pi$ ist:

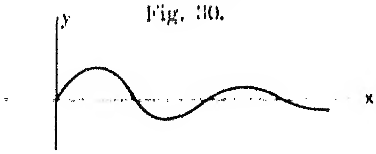
$$\log(-y_1) - \log y_0 = -\frac{\varepsilon \pi}{n'},$$

$$\log y_2 - \log(-y_1) = -\frac{\varepsilon \pi}{n'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die gemeinsame Differenz dieser Logarithmen wird nach Gauss das logarithmische Decrement genannt, während $2\pi/n'$ die Schwingungsdauer heisst. Die Beobachtung dieser beiden Grössen dient zur Bestimmung von n und ε.

Fig. 30.



Die Bewegung der Nadel ist also hier gleichfalls oscillatorisch, aber mit stets abnehmender Amplitude.

Betrachtet man x und y wieder als rechtwinklige Coordinaten, so erhält man die Curve Fig. 30 [illegible]

§. 58.

Fortsetzung. Aperiodische Schwingungen.

Wenn nun aber $\varepsilon > n$ ist, dann werden die Wurzeln α reell, und wenn wir $m = \sqrt{\varepsilon^2 - n^2}$ setzen, so ist m positiv und kleiner als ε, und das allgemeine Integral unserer Differentialgleichung §. 57, (1) wird

(1) $\quad y = $ [illegible]

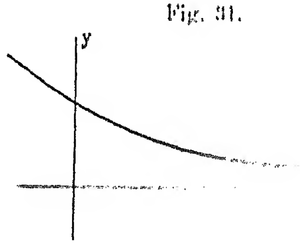
worin a und b die Integrationsconstanten sind, die sich bestimmen lassen, wenn für $x = 0$ die Werthe von y und dy/dx gegeben sind. Man erhält

(2) $\quad \dfrac{dy}{dx} = $ [illegible]

Es sind nun wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Wenn a und b entgegengesetzte Vorzeichen haben, so kann weder y noch dy/dx für einen endlichen Werth [illegible] verschwinden, [illegible] y für [illegible] unendlich gross und für [illegible] unendlichen [illegible] Magnetnadel, welche anfänglich Lage sie auch haben mag, ohne die Richtung ihrer Bewegung umzukehren [illegible] der Gleichgewichtslage nähern (Fig. 31).

Fig. 31.



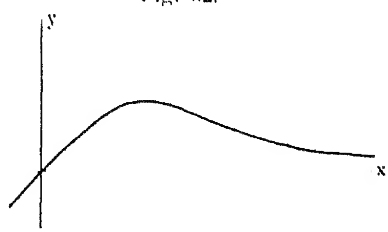
2. Wenn die Constanten a, b das gleiche [illegible] das positive — Vorzeichen haben, so wird $y = 0$ für einen Werth x_0 von x, und $dy/dx = 0$ für einen Werth [illegible] und zwar ist

$$x_0 = \frac{1}{2m} \log \frac{a}{b}, \quad x_1 = \frac{1}{2m} \log [illegible]$$

also $x_1 > x_0$. Für ein unendlich grosses negatives [illegible] wird y negativ unendlich gross und für ein unendlich grosses positives [illegible]

h klein. Wenn z. B. die Magnetnadel durch einen n Stoss aus der Gleichgewichtslage gebracht ist, so s zu einem gewissen Maximum der Ablenkung gehen, zur Zeit x_1 er- von da an sich gewichtslage wie- ptotisch nähern n beiden Fällen e oscillatorische nicht möglich, nnt daher diesen periodisch.

Fig. 32.



ibt noch ein dritter Hauptfall übrig, nämlich der, dass dass also die Gleichung §. 57, (2) zwei gleiche Wur- In diesem Falle ist die allgemeine Lösung der Diffe- chung (1)

$$y = (ax + b)\, e^{kx},$$

organg ist gleichfalls aperiodisch. Sie ist von der Art, zeigt, wenn $a = 0$ ist, sonst von der Art der Fig. 32.

§. 59.

me linearer Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten.

ntegration eines Systems gewöhnlicher linearer Diffe- chungen mit mehreren abhängigen Variablen kann h fortgesetzte Differentiation und Elimination aller n Variabeln bis auf eine auf die Integration einer lgleichung von entsprechend höherer Ordnung zurück- lan kann aber auch umgekehrt ein System von Diffe- chungen höherer Ordnung durch Einführung neuer an Stelle der Differentialquotienten auf ein System entialgleichungen zurückführen, in dem nur erste Diffe- tienten vorkommen. Wir wollen hier noch ein solches trachten, das wir in Bezug auf die Differentialquotienten annehmen:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2 + \cdots + c_{1n}\, y_n, \\
\frac{dy_2}{dx} &= c_{21}\, y_1 + c_{22}\, y_2 + \cdots + c_{2n}\, y_n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= c_{n1}\, y_1 + c_{n2}\, y_2 + \cdots + c_{nn}\, y_n,
\end{aligned}
$$

worin die c_{hk} Constanten sein sollen.

Setzt man hierin versuchsweise

$$
(2) \qquad y_1 = a_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = a_2 e^{\lambda x}, \quad \ldots\, y_n = a_n e^{\lambda x},
$$

so erhält man aus (1) zur Bestimmung der Constanten a_1, a_2, $\ldots\, a_n$, λ die Gleichungen

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
(c_{11} - \lambda)\, a_1 + c_{12}\, a_2 + \cdots + c_{1n}\, a_n &= 0, \\
c_{21}\, a_1 + (c_{22} - \lambda)\, a_2 + \cdots + c_{2n}\, a_n &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots& \\
c_{n1}\, a_1 + c_{n2}\, a_2 + \cdots + (c_{nn} - \lambda)\, a_n &= 0,
\end{aligned}
$$

und wenn die Constanten a_1, a_2, $\ldots\, a_n$ nicht alle gleich Null sein sollen, so muss, wenn wir zur Abkürzung

$$
(4) \qquad L(\lambda) = \begin{vmatrix}
c_{11} - \lambda, & c_{12}, & \ldots & c_{1n} \\
c_{21}, & c_{22} - \lambda, & \ldots & c_{2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
c_{n1}, & c_{n2}, & \ldots & c_{nn} - \lambda
\end{vmatrix}
$$

setzen, λ eine Wurzel der Gleichung

$$
(5) \qquad L(\lambda) = 0
$$

sein. Setzt man für λ eine Wurzel dieser Gleichung ein, so kann man aus (3) die Verhältnisse $a_1 : a_2 : \cdots : a_n$ bestimmen, während ein gemeinschaftlicher Factor h willkürlich bleibt. Nun ist die Gleichung (4) vom n^{ten} Grade und hat n Wurzeln λ_1, λ_2, $\ldots\, \lambda_n$, denen n Systeme der Constanten a_1, a_2, $\ldots\, a_n$ entsprechen. Man erhält dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (1) in der Form

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
y_1 &= h_1\, a_{11}\, e^{\lambda_1 x} + h_2\, a_{12}\, e^{\lambda_2 x} + \cdots h_n\, a_{1n}\, e^{\lambda_n x}, \\
y_2 &= h_1\, a_{21}\, e^{\lambda_1 x} + h_2\, a_{22}\, e^{\lambda_2 x} + \cdots h_n\, a_{2n}\, e^{\lambda_n x}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= h_1\, a_{n1}\, e^{\lambda_1 x} + h_2\, a_{n2}\, e^{\lambda_2 x} + \cdots h_n\, a_{nn}\, e^{\lambda_n x},
\end{aligned}
$$

worin h_1, h_2, $\ldots\, h_n$ die willkürlichen Constanten sind.

...se Betrachtung gilt zunächst nur für den Fall, dass die ...ng (5) n von einander verschiedene Wurzeln hat. Sie ...r auch in einem anderen Falle: Nehmen wir an, dass ...n Werth λ nicht nur die Determinante L, sondern auch ...mmtlichen Unterdeterminanten von $n - m + 1$ Reihen ...inden, dann sind für diesen Werth von λ

$$L(\lambda), \quad \frac{d\,L(\lambda)}{d\,\lambda}, \quad \ldots, \quad \frac{d^{m-1}\,L(\lambda)}{d\,\lambda^{m-1}}$$

Null, und λ ist eine (mindestens) $m$fache Wurzel von ... 0. Dann aber bleiben m von den Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2,$ ...nach den Gleichungen (3) willkürlich [1], und wir erhalten ...us dieser einen Wurzel m von einander unabhängige ...lare Lösungen. Daraus ergiebt sich der Satz:

Die Ausdrücke (6) stellen die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen (1) dar, wenn für jede $m$fache Wurzel der Gleichung $L(\lambda) = 0$ alle $n - m + 1$-reihigen Unterdeterminanten von $L(\lambda)$ verschwinden [2].

...un kann aber die Gleichung $L(\lambda) = 0$ auch eine $m$fache ...l haben, ohne dass alle $n - m + 1$-reihigen Unter...inanten verschwinden. Dann erhalten wir aus (2) nicht ...nügende Anzahl von particularen Lösungen, und in diesem ...kann man sich die nöthige Anzahl von Lösungen nur da...verschaffen, dass man in (2) die Coëfficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ...als constant, sondern als ganze rationale Functionen von ...immt, wie oben in §. 56. Die allgemeinere Untersuchung ...Frage lässt sich sehr vollständig und einfach durchführen ...ülfe der Theorie der linearen Substitutionen und ihrer ...ormation, auf die wir hier nicht eingehen können [3].

...n der Theorie der unendlich kleinen Schwingungen, in der ...abhängige Variable x die Zeit bedeutet, ist es von grosser ...igkeit, dass diese Variable nicht ausserhalb der Exponential...m, die in diesem Falle einen imaginären Exponenten hat,

---

[1] Vergl. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 1, 2. Aufl., §. 27.

[2] Wenn man in diesem Falle durch Differentiation und Elimination ...ntialgleichungen höherer Ordnung mit nur einer abhängigen Variablen ...will, so erhält man mehrere Differentialgleichungen von niedrigerer ...r Ordnung, deren jede nur eine abhängige Variable enthält.

[3] Vergl. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. 2, 2. Aufl., §. 41, 42.

vorkommt. Dies kann also nach dem eben bewiesenen Satze auch dann eintreten, wenn die bestimmende Gleichung (5) gleiche Wurzeln hat[1]).

§. 60.

Berechnung bestimmter Integrale durch die Integration von Differentialgleichungen.

Man kann nach Dirichlet's Vorgang durch die Integration linearer Differentialgleichungen gewisse bestimmte Integrale ermitteln, wovon hier einige Beispiele folgen. Man setze

$$(1)\qquad \begin{aligned} u &= \int_0^\infty e^{-k\alpha}\cos\alpha x\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},\\ v &= \int_0^\infty e^{-k\alpha}\sin\alpha x\,\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}, \end{aligned}$$

worin k eine positive Constante sei, und betrachte diese Integrale als Function der Variablen x. Für den besonderen Werth $x = 0$ erhält v den Werth 0 und für u ergiebt sich

$$u = \int_0^\infty e^{-k\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

oder durch die Substitution $\alpha = \beta^2$, $d\alpha = 2\beta\,d\beta$:

$$u = 2\int_0^\infty e^{-k\beta^2}d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{k}}\quad (\text{§. 12}).$$

Durch Differentiation von (1) findet man:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\int_0^\infty e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\sin\alpha x\,d\alpha,\\ \frac{dv}{dx} &= \int_0^\infty e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha. \end{aligned}$$

---

[1]) Dies ist, wie in Thomson and Tait, Natural philosophy bemerkt ist, von Lagrange und Laplace übersehen worden; vergl. Lord Rayleigh, Theory of sound, 2nd edition, vol. I, p. 109.

Andererseits erhält man aber durch Differentiation nach α

$$\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\cos\alpha x\right)$$

$$= -k e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\cos\alpha x - x e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\sin\alpha x + \frac{e^{-k\alpha}\cos\alpha x}{2\sqrt{\alpha}},$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\sin\alpha x\right)$$

$$= -k e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\sin\alpha x + x e^{-k\alpha}\sqrt{\alpha}\cos\alpha x + \frac{e^{-k\alpha}\sin\alpha x}{2\sqrt{\alpha}},$$

und wenn man diese Formeln nach α zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrirt, so verschwinden die linken Seiten und es ergiebt sich nach (1) und (2)

$$(3)\qquad \begin{array}{r|ll} -k\dfrac{dv}{dx} + x\dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{2}u = 0 & u, & -v, \\ +k\dfrac{du}{dx} + x\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{1}{2}v = 0 & v, & u. \end{array}$$

Wenn man nochmals nach x differentiirt, so erhält man hieraus vier Gleichungen, aus denen man v, dv/dx und d^2v/dx^2 eliminiren kann, und man wird auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für u geführt. Es ist aber besser, die beiden Gleichungen (3) direct, ohne diese Elimination, aufzulösen.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten hat man noch die beiden Bedingungen

$$(4)\qquad \text{für } x = 0 \text{ ist } u = \sqrt{\frac{\pi}{k}},\quad v = 0.$$

Wenn man die Gleichungen (3), so wie es in den Formeln angedeutet ist, mit u, v und dann mit $-v$, u multiplicirt und jedesmal addirt, so folgt

$$(5)\qquad \begin{array}{r|ll} k\left(v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}\right) + x\left(u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{dv}{dx}\right) + \dfrac{1}{2}(u^2+v^2) = 0 & x, & -k, \\ k\left(u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{dv}{dx}\right) - x\left(v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}\right) \qquad\qquad = 0 & k, & x, \end{array}$$

und wenn man hier mit x, k multiplicirt und addirt:

$$(k^2+x^2)\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx}\right) + \frac{1}{2}x(u^2+v^2) = 0.$$

Nun ist aber

$$2(u\,du + v\,dv) = d(u^2 + v^2),$$

und es ergiebt sich also

$$\frac{d \log(u^2 + v^2)}{dx} = \frac{-x}{k^2 + x^2} = -\frac{d \log\sqrt{k^2 + x^2}}{dx}.$$

Dies lässt sich nun unmittelbar integriren und führt, mit Rücksicht auf die Bedingungen (4), zu dem Resultate

$$(6) \qquad u^2 + v^2 = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + x^2}}.$$

Wenn wir zweitens die Gleichungen (5) mit $-k$ und x multipliciren und wieder addiren, so ergiebt sich

$$(k^2 + x^2)(u\,dv - v\,du) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2)\,dx,$$

und dies kann man leicht auf die Form bringen

$$\frac{d\,\dfrac{v}{u}}{1 + \dfrac{v^2}{u^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{d\,\dfrac{x}{k}}{1 + \dfrac{x^2}{k^2}},$$

und durch Integration mit Rücksicht auf (4)

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{k},$$

wenn der Bogen arc tg beiderseits zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen wird. Setzen wir

$$(7) \qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{k} = \psi,$$

so folgt hieraus

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\psi,$$

und mit Rücksicht auf (6)

$$(8) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{k^2 + x^2}}\cos\frac{1}{2}\psi, \\ v &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{k^2 + x^2}}\sin\frac{1}{2}\psi. \end{aligned}$$

Damit sind die Werthe der Integrale (1) bestimmt. Macht man darin noch die Substitution $\alpha = \beta^2$, so kann man die

Integrationsgrenzen für β auch von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen und erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\beta^2} \cos \beta^2 x \, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{k^2+x^2}} \cos \frac{1}{2}\psi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\beta^2} \sin \beta^2 x \, d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{k^2+x^2}} \sin \frac{1}{2}\psi,$$

was sich mit Benutzung der imaginären Einheit i auch in die eine Formel zusammenfassen lässt:

$$\text{(9)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(k-ix)\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{k^2+x^2}} e^{\frac{i\psi}{2}}.$$

Hierin kann man nach dem Satze §. 9 die positive Grösse k in Null übergehen lassen. Dann nähert sich ψ bei positivem x der Grenze $\frac{1}{2}\pi$, und man erhält aus (9), wenn man $x = 1$ annimmt

$$\text{(10)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\beta^2} d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i),$$

oder in reeller Form

$$\text{(11)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\beta^2)\, d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\beta^2)\, d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

§. 61.

Zweites Beispiel.

Wir leiten nach dieser Methode noch ein anderes bestimmtes Integral her. Es sei

$$\text{(1)} \qquad \omega = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \cos \alpha x \, d\alpha,$$

woraus durch Differentiation:

$$\text{(2)} \qquad \frac{d\omega}{dx} = -\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \alpha \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Andererseits erhält man durch Differentiation nach α

$$d\,e^{-\alpha^2} \sin \alpha x = -2\,e^{-\alpha^2} \alpha \sin \alpha x\, d\alpha + x\, e^{-\alpha^2} \cos \alpha x\, d\alpha,$$

woraus durch Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nach (1) und (2):

$$(3) \qquad 2\,\frac{d\omega}{dx} + x\omega = 0,$$

und durch Integration

$$(4) \qquad \omega = C e^{-\frac{1}{4}x^2},$$

worin C von x unabhängig ist. Es ist aber für $x = 0$

$$\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi} \qquad [\text{§. 12, (3)}],$$

und mithin ergiebt sich

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \cos \alpha x\, d\alpha = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Substituirt man $\alpha\sqrt{p}$ für α und setzt $q = x\sqrt{p}$, worin dann p ein positiver, q ein beliebiger Parameter ist, so folgt die etwas allgemeinere Formel:

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2} \cos q\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}}$$

oder auch, indem man das Integral in zwei gleiche Theile zerlegt

$$(7) \qquad \int_{0}^{\infty} e^{-p\alpha^2} \cos q\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{q^2}{4p}}.$$

§. 62.

Nicht homogene lineare Differentialgleichungen.

Die Integration der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen lässt sich nach einem Verfahren von Lagrange auf die Integration einer homogenen Differentialgleichung und auf Quadraturen zurückführen.

(2) $$D(y) = X$$

lautet, worin $a_1, \ldots a_n$, X gegebene Functionen von x sind.

Wir wollen annehmen, dass die homogene Gleichung

(3) $$D(v) = 0$$

vollständig integrirt sei, dass also n von einander unabhängige Lösungen $v_1, v_2, \ldots v_n$ der Gleichung (3) gefunden seien.

Wir lassen nun $u_1, u_2, \ldots u_n$ ein noch zu bestimmendes System von Functionen von x bedeuten und setzen

(4) $$y = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k,$$

und wollen nun die Functionen u_k so bestimmen, dass die Differentialgleichung (1) durch (4) befriedigt wird.

Wenn wir den Ausdruck (4) nach x differentiiren, so erhalten wir zwei ähnliche Summen, von denen wir die eine jedoch gleich Null setzen, wodurch eine Bedingungsgleichung für die u gegeben ist. Wir setzen dann die Differentiation fort und verfahren jedesmal ebenso, ausgenommen bei der letzten, n^{ten} Differentiation.

Bezeichnen wir die successiven Differentialquotienten irgend einer Function u zur Abkürzung mit $u', u'', \ldots u^{(h)}, \ldots$ so bilden wir also das folgende System von Gleichungen:

$$(5^{a}) \quad \begin{aligned} y &= \Sigma u_k v_k \\ y' &= \Sigma u_k v_k', \\ y'' &= \Sigma u_k v_k'', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y^{(n-1)} &= \Sigma u_k v_k^{(n-1)}, \\ y^{(n)} &= \Sigma u_k v_k^{(n)} + X, \end{aligned} \qquad (5^{b}) \quad \begin{aligned} \Sigma v_k u_k' &= 0 \\ \Sigma v_k' u_k' &= 0 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma v_k^{(n-2)} u_k' &= 0 \\ \Sigma v_k^{(n-1)} u_k' &= X. \end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichungen (5^{a}) der Reihe nach mit $a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, 1$ multipliciren und addiren, so folgt

$$D(y) = \Sigma u_k D(v_k) + X,$$

und da nach Voraussetzung $D(v_k) = 0$ ist, so ist die Gleichung (1)

befriedigt, wenn die Functionen u_k aus den Gleichungen (5^b) bestimmt werden. Diese sind aber für die Unbekannten du_k/dx linear, und ihre Determinante ist von Null verschieden[1]). Sind dann die Differentialquotienten du_k/dx gefunden, so erhält man die Functionen u_k selbst durch je eine Quadratur, die noch eine additive Constante mit sich bringt, und der allgemeine Ausdruck für y erhält die Form

$$(6) \qquad y = \Sigma u_k v_k + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n.$$

Nehmen wir z. B. $n = 2$ und die vorgelegte Differentialgleichung in der Form

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = X,$$

so ergeben sich zwei Gleichungen (5^b):

$$(8) \qquad \begin{aligned} v_1 u_1' + v_2 u_2' &= 0, \\ v_1' u_1' + v_2' u_2' &= X, \end{aligned}$$

und daraus durch Auflösung, wenn wir

$$(9) \qquad v_1 v_2' - v_2 v_1' = \varDelta$$

setzen:

$$(10) \qquad \varDelta u_1' = - v_2 X, \quad \varDelta u_2' = v_1 X.$$

$\varDelta$ ist jedenfalls von Null verschieden, denn sonst würde sich gegen unsere Annahme aus (9) ein constantes Verhältniss $v_1 : v_2$ ergeben, und man erhält also aus (10)

$$(11) \qquad u_1 = \int \frac{-v_2 X\, dx}{\varDelta}, \quad u_2 = \int \frac{v_1 X\, dx}{\varDelta}.$$

Danach lässt sich die Endformel in folgender Gestalt darstellen:

Wir bezeichnen die Integrationsvariable in (11) durch den Buchstaben ξ, müssen dann aber bei jeder Function in der Bezeichnung ausdrücken, ob das Argument x oder ξ zu nehmen ist.

Wenn wir dann unter c, c_1, c_2 willkürliche Constanten verstehen, so ergiebt sich aus (11) und (6) für das allgemeine Integral der Differentialgleichung (7)

$$(12) \quad y = \int_c^x X(\xi)\,[v_1(\xi)\, v_2(x) - v_2(\xi)\, v_1(x)]\, \frac{d\xi}{\varDelta(\xi)} + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x);$$

es kommen hier nur scheinbar drei willkürliche Constanten vor,

[1]) Vergl. §. 55, Anmerkung.

denn eine Aenderung von c bedingt nur eine Aenderung von c_1 und c_2, und wir verlieren also nichts an Allgemeinheit, wenn wir für c irgend einen speciellen Werth setzen.

Die Function Δ lässt sich aus den Coëfficienten der Differentialgleichung durch eine Quadratur finden. Es ist nämlich nach der Definition von v_1, v_2

$$v_1'' + a v_1' + b v_1 = 0,$$
$$v_2'' + a v_2' + b v_2 = 0,$$

und daraus:

$$v_1 v_2'' - v_2 v_1'' + a(v_1 v_2' - v_2 v_1') = 0,$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{d\Delta}{dx} = -a . \Delta.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration, da a eine gegebene Function von x ist,

$$(13) \qquad \Delta = C e^{-\int a\,dx},$$

worin die Constante C (oder die untere Grenze in dem Integrale) von der Wahl der particularen Integrale v_1, v_2 abhängt.

§. 63.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Bei der Integration der partiellen Differentialgleichungen handelt es sich um die Bestimmung einer Function von mehreren unabhängigen Variablen aus einer Gleichung, die die partiellen Ableitungen dieser Function nach den Variablen enthält.

Pfaff und Jacobi haben die Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer unbekannten Function allgemein auf die Integration eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückgeführt.

Wir wollen hier nur eine specielle Art dieser Gleichungen etwas näher betrachten, die man, wenn auch in einem etwas anderen Sinne wie bisher, als linear bezeichnet.

Es seien $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ ein System von $n + 1$ Variablen und $X, X_1, X_2, \ldots X_n$ gegebene Functionen dieser Variablen.

Es soll eine der Variablen, etwa x, als Function der übrigen $x_1, x_2, \ldots x_n$ so bestimmt werden, dass die Gleichung

$$(1) \qquad X = X_1 \frac{\partial x}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial x}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial x}{\partial x_n}$$

befriedigt ist. Diese Gleichung ist zwar in Bezug auf die Differentialquotienten von x linear, nicht aber in Bezug auf die Function x selbst, die in beliebiger Weise in den X vorkommen kann. Wir haben hier also nicht mehr die Sätze, die bei den homogenen linearen Differentialgleichungen so nützlich sind, dass man eine Lösung mit einem willkürlichen constanten Factor multipliciren kann, ohne dass sie aufhört, eine Lösung zu sein, und dass die Summe zweier particularer Lösungen wieder eine Lösung ist.

Wir nehmen eine Integralgleichung von (1) an, die eine willkürliche Constante c enthält, und denken uns diese Integralgleichung in die Form gesetzt

$$(2) \qquad \Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = c,$$

so dass die Constante c in Φ nicht mehr vorkommt.

Durch Auflösung der Gleichung (2) nach x würde sich x als Function der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Constanten c ergeben. Wenn wir nun (2) in Bezug auf eine der Variablen $x_1, \ldots x_n$ differentiiren, so folgt

$$(3) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0,$$

und danach geht die Gleichung (1) über in folgende:

$$(4) \qquad X \frac{\partial \Phi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Diese Gleichung muss erfüllt sein, wenn (2) eine Integralgleichung von (1) ist; sie muss zunächst nur unter Zuziehung von (2) identisch in Bezug auf $c, x_1, x_2, \ldots x_n$ befriedigt sein. Da aber c eine willkürliche Constante ist, die in (4) nicht vorkommt, so muss die Function Φ der Gleichung (4) identisch in Bezug auf $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ genügen, und es ist also Φ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (4), die nun in Bezug auf Φ wirklich linear ist, dafür aber eine unabhängige Variable mehr enthält als die Gleichung (1).

Hat man irgend eine Lösung Φ der Gleichung (4), in der die Variable x vorkommt, so giebt uns auch umgekehrt die Gleichung (2) eine Lösung von (1).

§. 64.

Zurückführung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Wir betrachten nun mit Jacobi das System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

(1) $$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X},\quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X},\quad \dots\quad \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X},$$

was sich auch symmetrischer so darstellen lässt:

(2) $$dx : dx_1 : \cdots : dx_n = X : X_1 : \cdots : X_n.$$

Wir wollen annehmen, dass wir dieses System vollständig integrirt haben, d. h., dass wir daraus $x_1, x_2, \dots x_n$ als Functionen der unabhängigen Variablen x und von n willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ bestimmt haben.

Wir nehmen ferner an, dass die Lösung in der Form dargestellt sei:

(3) $$\begin{aligned} f_1(x, x_1, x_2, \dots x_n) &= c_1,\\ f_2(x, x_1, x_2, \dots x_n) &= c_2,\\ &\cdots\\ f_n(x, x_1, x_2, \dots x_n) &= c_n, \end{aligned}$$

worin $f_1, f_2, \dots f_n$ bekannte Functionen der Variablen sind, und $c_1, c_2, \dots c_n$ die willkürlichen Constanten, die in den Functionen f nicht vorkommen sollen. Durch Auflösung der Gleichungen (3) erhält man dann $x_1, x_2, \dots x_n$ als Functionen von $x, c_1, c_2, \dots c_n$.

Solche Gleichungen, die wie (3) eine Constante auf der einen Seite abgesondert enthalten, die auf der anderen Seite nicht vorkommt, nennt Jacobi speciell Integrale, zum Unterschiede von Integralgleichungen, worunter er irgend eine Gleichung zwischen den Variablen und Constanten versteht, die durch die Lösungen der Differentialgleichungen befriedigt ist.

Wenn wir nun eine der Gleichungen (3) differentiiren, so ergiebt sich

$$\frac{\partial f_k}{\partial x}dx + \frac{\partial f_k}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n}dx_n = 0,$$

und folglich nach (1) oder (2)

$$(4) \qquad X \frac{\partial f_k}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f_k}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f_k}{\partial x_n} = 0.$$

Diese Gleichung müsste zunächst wiederum mit Hülfe der Gleichungen (3) befriedigt sein. Da aber die Constanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ in (4) nicht vorkommen, so muss (4) identisch befriedigt sein, und man schliesst also, dass die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ Lösungen der partiellen Differentialgleichung §. 63, (4) sind.

Ist aber andererseits $\Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Function der Variablen $x, x_1, \ldots x_n$, so denken wir uns mit Hülfe der Gleichungen (3) die $x_1, x_2, \ldots x_n$ eliminirt, wodurch sich ergeben mag,

$$\Phi(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \Pi(x, c_1, c_2, \ldots c_n),$$

wenn Π ein Functionszeichen bedeutet. Setzen wir hierin für $c_1, c_2, \ldots c_n$ wieder die Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ ein, so ergiebt sich die Identität:

$$(5) \qquad \Phi = \Pi(x, f_1, f_2 \ldots f_n),$$

und hieraus durch Differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \qquad\quad \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} &= \qquad\quad \Sigma \frac{\partial \Pi}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_n}.
\end{aligned}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $X, X_1, \ldots X_n$ und addiren, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (4)

$$(6) \qquad X \frac{\partial \Phi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = X \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Nehmen wir X von Null verschieden an, so ergiebt sich, dass die Differentialgleichung §. 63, (4) nur dann befriedigt ist, wenn

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0,$$

also Π von x unabhängig ist. Damit sind wir dann zu folgendem Satze gelangt:

Die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichung

(7) $$X \frac{\partial \Phi}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0$$

ist

(8) $$\Phi = \Pi(f_1, f_2, \ldots f_n),$$

wenn Π eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$ ist.

Die Annahme, die wir hier gemacht haben, dass X von Null verschieden sei, ist aber unwesentlich, da es keinen Sinn haben würde, alle $X, X_1, \ldots X_n$ gleich Null anzunehmen, und da weder in der Differentialgleichung (7) noch in dem Systeme (2) die Variable x irgendwie vor den anderen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgezeichnet ist.

Hiernach sind die Aufgaben, die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung §. 63, (1) zu finden, und das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (2) zu integriren, wesentlich dieselben. Freilich aber ist auch hier hervorzuheben, dass, wenn auch diese allgemeine Integration gelungen ist, in physikalischen Anwendungen die Hauptschwierigkeit, nämlich die Bestimmung der willkürlichen Function, häufig erst beginnt. Darüber lässt sich nichts Allgemeines sagen. Wir werden später bei Beispielen genaueren Einblick in den Sachverhalt gewinnen.

§. 65.

Lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Die nächst einfache Art von linearen partiellen Differentialgleichungen sind die von der zweiten Ordnung, auf die viele physikalische Fragen führen, in denen die Zeit und die räumlichen Coordinaten die unabhängigen Variablen sind. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist bei zwei unabhängigen Variablen x und t

$$l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial t} + r u = s,$$

und besonders wichtig ist der Fall, dass sie homogen sind, dass also $s = 0$ ist.

Sind die Coëfficienten l, m, n, p, q, r constante Grössen, so ist es leicht, particulare Lösungen der homogenen Gleichung

$$l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+n\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p\frac{\partial u}{\partial x}+q\frac{\partial u}{\partial t}+ru=0$$

zu finden. Wir setzen, analog dem Verfahren in §. 56, in diesem Falle

$$u=e^{\alpha x+\beta t},$$

wo α, β Constanten sind. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha u,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\beta u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\alpha^2 u,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}=\alpha\beta u,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\beta^2 u.$$

Folglich geht die partielle Differentialgleichung über in

$$u\,\{l\alpha^2+m\alpha\beta+n\beta^2+p\alpha+q\beta+r\}=0.$$

Hier haben wir die Klammergrösse $=0$ zu setzen. Dadurch ergiebt sich eine quadratische Gleichung in α und β. Wir können also die eine der beiden Grössen, etwa β, beliebig wählen, und erhalten zu jedem Werthe von β aus der Gleichung zwei bestimmte zugehörige Werthe von α. Es giebt also eine unendliche Menge zusammengehöriger Werthe von α und β, welche der Bedingungsgleichung

$$l\alpha^2+m\alpha\beta+n\beta^2+p\alpha+q\beta+r=0$$

genügen, und folglich haben wir auch unendlich viele particulare Lösungen der partiellen Differentialgleichung.

Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied der partiellen und der gewöhnlichen Differentialgleichungen, da die letzteren nur eine endliche Anzahl unabhängiger particularer Integrale besitzen.

Sind $U_1, U_2, U_3, \ldots$ particulare Lösungen der homogenen linearen partiellen Differentialgleichung, so kann man jede mit einer willkürlichen Constanten multipliciren und erhält durch Addition der Producte wieder eine Lösung der homogenen Gleichung, auch in dem Falle, wo l, m, n, p, q, r nicht constant, sondern Functionen der unabhängigen Variablen x, t sind. Auf diese Weise setzt sich aus den unendlich vielen particularen Lösungen eine allgemeinere Lösung zusammen, die demnach unendlich viele willkürliche constante Grössen enthält.

Die Auffindung der particularen Lösungen dieser Gleichungen ist hiernach, wenigstens bei constanten Coëfficienten $l, m, \ldots$, mit gar keiner Schwierigkeit verknüpft. Man kann also auch allgemeine Lösungen leicht herstellen. Mit solchen allgemeinen Lösungen, in denen die Constanten willkürliche Werthe haben, ist aber so gut wie nichts gewonnen. Vielmehr liegt bei den Aufgaben, die auf partielle Differentialgleichungen führen, der wichtigste Punkt der Frage darin, die Constanten so zu bestimmen, dass gewisse Nebenbedingungen erfüllt werden, die durch die physikalischen Voraussetzungen des gerade vorliegenden Problems gegeben sind, und für die man fast in jedem einzelnen Falle besondere Wege einzuschlagen hat.

Achter Abschnitt.

Bessel'sche Functionen.

§. 66.

Entwickelung von $\cos^n \omega$ in eine Fourier'sche Reihe.

Wir haben im vierten Abschnitt gesehen, dass sich eine periodische Function einer Variablen nach sinus und cosinus der Vielfachen eines Winkels entwickeln lässt. Insbesondere gehören hierher die rationalen Functionen von sinus und cosinus selbst, und besonders also die Potenzen dieser Functionen.

Eine hierher gehörige Aufgabe, die zahlreiche Anwendungen gestattet, und die wir daher hier eingehender betrachten, ist die, die Function $\cos^n \omega$ für irgend einen positiven ganzzahligen Exponenten n in eine nach cosinus der Vielfachen von ω fortschreitende Reihe zu entwickeln. Wir erhalten in diesem Falle eine endliche Reihe. Am einfachsten gelangt man zu diesem Ausdrucke durch Benutzung des binomischen Lehrsatzes. Um die Formeln übersichtlich darzustellen, setzen wir zur Abkürzung

$$\Pi(n) = 1.2.3 \ldots n = n!, \qquad \Pi(0) = 1 \tag{1}$$

und wenden dann den binomischen Lehrsatz in der bekannten Form an

$$(a + b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\Pi(n)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)}\, a^\nu b^{n-\nu}. \tag{2}$$

Nun ist bekanntlich

$$2\cos\omega = e^{i\omega} + e^{-i\omega} \tag{3}$$

und wenn wir daher in (2) $a = e^{i\omega}$, $b = e^{-i\omega}$ setzen, so ergiebt sich

(4) $$2^n \cos^n \omega = \sum_{\nu}^{n}{}_{0} \frac{\Pi(n)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)}\, e^{(2\nu - n)i\omega}.$$

Wenn wir in dieser Reihe je zwei Glieder zusammenfassen, die gleich weit vom Anfang und vom Ende abstehen, so erhält man

(5) $$\frac{\Pi(n)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)}\left(e^{(2\nu-n)i\omega} + e^{-(2\nu-n)i\omega}\right)$$
$$= \frac{2\,\Pi(n)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n-\nu)} \cos(2\nu - n)\,\omega,$$

und im Falle eines geraden n bleibt dann noch ein einzelnes dem Werth $\nu = \frac{1}{2} n$ entsprechendes Glied übrig.

Wenn wir also

(6) $$2^{n-1} \cos^n \omega = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \omega + b_2 \cos 2\omega + \cdots + b_n \cos n\omega$$

setzen, so ist nach §. 33, III.

(7) $$b_m = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \cos^n \omega \cos m\omega\, d\omega,$$

und die Vergleichung mit (5) ergiebt, dass bei geradem n nur die geraden, bei ungeradem n nur die ungeraden Glieder in (6) von Null verschieden sind, und dass, wenn $n - m$ gerade ist,

(8) $$b_m = \frac{\Pi(n)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)}.$$

Wir können also den Satz aussprechen: Es ist

(9) $$\int_0^\pi \cos^n \omega \cos m\omega\, d\omega = 0,$$

wenn $n - m$ ungerade oder negativ ist und

$$= \frac{\pi}{2^n} \frac{\Pi(n)}{\Pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+m}{2}\right)},$$

wenn $n - m$ gerade und positiv oder Null ist.

§. 67.

Die Entwickelung von $e^{ix\cos\omega}$ in eine trigonometrische Reihe.

Das zuletzt gefundene Resultat kann dazu verwendet werden, eine Function, die durch eine nach Potenzen von $\cos\omega$ fortschreitende Reihe dargestellt ist, in eine trigonometrische Reihe zu verwandeln. Es sei

$$f(\cos\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos^n \omega \tag{1}$$

eine convergente Potenzreihe, und es sollen in

$$f(\cos\omega) = \frac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\omega + c_2 \cos 2\omega + c_3 \cos 3\omega + \cdots \tag{2}$$

die Coëfficienten

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos\omega) \cos m\omega \, d\omega \tag{3}$$

bestimmt werden. Setzen wir die Reihe (1) ein, so ergiebt sich

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos m\omega \cos^n \omega \, d\omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^\pi \cos m\omega \cos^n \omega \, d\omega.$$

Durch die zweite von diesen Formeln ist c_m durch eine unendliche Reihe ausgedrückt, in der nach §. 66 (9) alle Glieder verschwinden, in denen $n < m$ oder $n - m$ ungerade ist. Setzen wir also $n = m + 2\nu$, so durchläuft ν alle Werthe 0, 1, 2, ... und wir erhalten, wenn wir aus §. 66 (9) den Werth

$$\int_0^\pi \cos(m\omega) \cos^{m+2\nu} \omega \, d\omega = \frac{\pi}{2^{m+2\nu}} \frac{\Pi(m+2\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(m+\nu)}$$

einsetzen:

$$c_m = 2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{m+2\nu}}{2^{m+2\nu}} \frac{\Pi(m+2\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(m+\nu)}. \tag{4}$$

Wir wollen dies auf den Fall

$$f(\cos\omega) = e^{ix\cos\omega}$$

anwenden, worin x eine Variable sein soll. In diesem Falle ist nach der bekannten Reihenentwickelung für die Exponentialreihe

$$a_n = \frac{i^n x^n}{\Pi(n)},$$

und es ergiebt sich aus (4)

$$(5)\qquad c_m = 2\, i^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2\nu}}{\Pi(\nu)\, \Pi(m+\nu)}.$$

§. 68.

Die Bessel'schen Functionen.

Unter dem Namen **Bessel'sche Functionen** führen wir eine unbegrenzte Reihe von Functionen ein, die wir durch die unendlichen Reihen

$$(1)\qquad J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Pi(\nu)\, \Pi(n+\nu)},\qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

definiren, so dass also in der Formel (5) des vorigen Paragraphen

$$(2)\qquad c_m = 2\, i^m J_m(x)$$

wird. Die Reihen für $J_n(x)$ lassen sich in ausführlicher Form auch so darstellen:

$$(3)\qquad J_n(x) = \frac{x^n}{2.4\ldots 2n}\left[1 - \frac{x^2}{2.2n+2} + \frac{x^4}{2.4.2n+2.2n+4} - \cdots\right]$$

und beispielsweise

$$(4)\qquad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2.2} + \frac{x^4}{2.4.2.4} - \cdots,$$

wofür wir auch $J(x)$ setzen, und

$$(5)\qquad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2.2.4} + \frac{x^5}{2.2.4.4.6} - \cdots$$

Diese Reihen sind, wie der Vergleich mit den bekannten Potenzreihen für e^x, $\sin x$, $\cos x$ ... lehrt, für alle reellen und complexen Werthe von x convergent, und zwar um so besser,

je grösser der Index n ist. Sie definiren also analytische Functionen der complexen Variablen x.

Aus (2) erhält man einen Ausdruck für die Bessel'schen Functionen durch bestimmte Integrale, den wir jetzt noch ableiten wollen. Es ist nämlich mit Rücksicht auf (2) und §. 67 (3)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{i x \cos \omega} \cos n \omega \, d\omega = i^n J_n(x).$$

Wenn man hierin

$$2 \cos n \omega = e^{i n \omega} + e^{-i n \omega}$$

setzt, so folgt

$$2\pi i^n J_n(x) = \int\limits_0^\pi e^{i(x \cos \omega + n \omega)} d\omega + \int\limits_0^\pi e^{i(x \cos \omega - n\omega)} d\omega,$$

wofür man auch, wenn man im zweiten der beiden Integrale $-\omega$ für ω substituirt, setzen kann

$$(6) \qquad i^n J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{i(x\cos\omega + n\omega)} d\omega.$$

Da hier unter dem Integralzeichen eine Function mit der Periode 2π steht, so kann das Integrationsintervall $(-\pi, +\pi)$ durch irgend ein anderes Intervall von der Grösse 2π ersetzt werden. Substituirt man dann noch $\pi/2 - \omega$ für ω und beachtet, dass

$$i^n = e^{\frac{\pi i}{2} n}$$

ist, so ergiebt sich

$$(7) \qquad J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{i(x \sin\omega - n\omega)} d\omega.$$

Setzt man darin

$$e^{i(x\sin\omega - n\omega)} = \cos(x \sin\omega - n\omega) + i \sin(x\sin\omega - n\omega),$$

so verschwindet auf der rechten Seite der imaginäre Theil, und es bleibt

$$(8) \qquad \begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \cos(x\sin\omega - n\omega)\, d\omega \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos(x \sin\omega - n\omega)\, d\omega. \end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte Darstellung von $J_n(x)$ durch ein bestimmtes Integral.

Daraus speciell für $n = 0$

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \omega)\, d\omega,$$

wofür man auch setzen kann

$$(9) \qquad J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \omega)\, d\omega.$$

§. 69.

Relationen zwischen den Bessel'schen Functionen verschiedener Ordnung und die Differentialgleichung für die Bessel'schen Functionen.

Die Bessel'schen Functionen, wie sie im vorigen Paragraphen definirt sind, haben, wie schon die Reihenentwickelungen zeigen, mannigfache Analogien mit den trigonometrischen Functionen, und in physikalischen Anwendungen spielen sie vielfach eine ähnliche Rolle. Aehnlich wie die trigonometrischen Functionen bei der Integration von linearen Differentialgleichungen mit constanten Coëfficienten auftreten, so sind die Bessel'schen Functionen Integrale von gewissen einfachen linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coëfficienten, die in vielen physikalischen Problemen vorkommen. Indem wir diese Differentialgleichung ableiten, erhalten wir zugleich einige wichtige Recursionsformeln für die Bessel'schen Functionen.

Es ist nach der Definition §. 68 (1)

$$(1) \qquad J_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1}}{\Pi(\nu)\, \Pi(n+\nu-1)},$$

$$(2) \qquad J_{n+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu+1}}{\Pi(\nu)\, \Pi(n+\nu+1)},$$

oder, wenn wir in den letzten Formeln $\nu - 1$ an Stelle von ν setzen, so dass die Summation von $\nu = 1$ bis $\nu = \infty$ zu erstrecken ist:

$$J_{n+1}(x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1}}{\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+\nu)}. \tag{3}$$

Hiernach bilden wir durch Addition von (1) und (3) und Benutzung der Formel

$$n\,\Pi(n-1) = \Pi(n)$$

$$J_{n-1} + J_{n+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{\Pi(n-1)} + n \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1}}{\Pi(\nu)\,\Pi(n+\nu)}$$

$$= \frac{2n}{x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\Pi(\nu)\,\Pi(n+\nu)}$$

und folglich nach der Definition von J_n die erste Recursionsformel

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x), \tag{4}$$

eine Formel, die für jedes positive n gilt, aber für $n = 0$ nach unseren bisherigen Definitionen nicht mehr anwendbar ist, es sei denn, dass man $J_{-1} = -J_1$ setzen wollte.

Wenn wir ferner (3) von (1) subtrahiren, so findet man ebenso:

$$J_{n-1} - J_{n+1} = \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{\Pi(n-1)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1} (n+2\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n+\nu)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1} (n+2\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n+\nu)}.$$

Andererseits ist aber nach §. 68 (1)

$$\frac{dJ_n}{dx} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu-1} (n+2\nu)}{\Pi(\nu)\,\Pi(n+\nu)},$$

und es ergiebt sich

$$(5) \qquad 2\,\frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} - J_{n+1},$$

was die zweite Recursionsformel ist.

Auch diese Formel ist für $n = 0$ nicht mehr ohne weiteres anwendbar. Man findet aber durch Differentiation der Reihe §. 68 (4) unmittelbar

$$(6) \qquad \frac{dJ_0}{dx} = -J_1(x),$$

und auch diese Formel ist in (5) enthalten, wenn man $J_{-1} = -J_1$ setzt.

Nun können wir durch einfache Elimination eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten, der die Function J_n genügt.

Wenn wir in (4) und (5) n in $n-1$ verwandeln, so folgt

$$(7) \qquad \frac{2(n-1)}{x} J_{n-1} = J_{n-2} + J_n,$$

$$(8) \qquad 2\,\frac{dJ_{n-1}}{dx} = J_{n-2} - J_n,$$

und wir haben so vier Gleichungen, aus denen $J_{n-2}, J_{n-1}, J_{n+1}$ zu eliminiren sind. Wenn wir (4) und (5) addiren, dagegen (7) und (8) subtrahiren, so sind bereits J_{n+1} und J_{n-2} eliminirt, und es ergeben sich die beiden Gleichungen

$$(9) \qquad J_{n-1} = \frac{dJ_n}{dx} + \frac{n}{x} J_n$$

und

$$(10) \qquad \frac{dJ_{n-1}}{dx} = \frac{n-1}{x} J_{n-1} - J_n,$$

wofür man mit Benutzung von (9) auch setzen kann

$$(11) \qquad \frac{dJ_{n-1}}{dx} = \frac{n-1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(\frac{n(n-1)}{x^2} - 1\right) J_n,$$

ferner durch Differentiation von (9)

$$\frac{dJ_{n-1}}{dx} = \frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{n}{x}\frac{dJ_n}{dx} - \frac{n}{x^2} J_n,$$

und wenn man dies in (11) einsetzt, so folgt die gesuchte Differentialgleichung

$$(12) \qquad \frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J_n = 0.$$

Diese Gleichung gilt auch noch für $n = 0$, wofür sie die Form annimmt

$$\frac{d^2 J}{d x^2} + \frac{1}{x} \frac{d J}{d x} + J = 0. \tag{13}$$

Der Differentialgleichung (12) lässt sich eine für manche Zwecke geeignetere Form geben, die man leicht durch Differentiation bestätigt:

$$\frac{d^2 \sqrt{x}\, J_n(x)}{d x^2} + \left(1 - \frac{4 n^2 - 1}{4 x^2}\right) \sqrt{x}\, J_n(x) = 0, \tag{14}$$

und für $n = 0$

$$\frac{d^2 \sqrt{x}\, J(x)}{d x^2} + \left(1 + \frac{1}{4 x^2}\right) \sqrt{x}\, J(x) = 0. \tag{15}$$

Aehnlich lässt sich (9) in folgende Form setzen

$$\frac{d x^n J_n(x)}{d x} = x^n J_{n-1}(x), \tag{16}$$

und wenn man in (10) n durch $n + 1$ ersetzt,

$$\frac{d x^{-n} J_n(x)}{d x} = - x^{-n} J_{n+1}(x), \tag{17}$$

von denen (17) auch noch für $n = 0$ gilt, (16) aber wieder nur unter der Voraussetzung, dass $J_{-1} = - J_1$ gesetzt wird.

§. 70.

Integralformeln für die Bessel'schen Functionen.

Eine Reihe wichtiger Theoreme über die Bessel'schen Functionen ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung. Wenn u und v Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d x^2} + \varphi u &= 0, \\ \frac{d^2 v}{d x^2} + \psi v &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

sind, worin φ und ψ irgend welche Functionen von x sein können, so erhält man, wenn man diese Gleichungen mit v und u multiplicirt und subtrahirt:

$$v \frac{d^2 u}{d x^2} - u \frac{d^2 v}{d x^2} = (\psi - \varphi) u v, \tag{2}$$

und wenn man die Identität

$$v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)$$

benutzt, so erhält man das folgende Theorem:

Sind u und v Lösungen der Differentialgleichungen (1), so ist

I. $$v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx} = \int(\psi - \varphi)\,u\,v\,dx + \text{const.}$$

Setzt man hierin irgend zwei Werthe von x ein und subtrahirt die entstandenen Resultate von einander, so fällt rechts die Constante heraus, und es bleibt ein bestimmtes Integral.

Hiervon machen wir zunächst die folgende Anwendung.

Wir setzen:

$$u = \sqrt{x}\,J_n(\alpha x), \qquad v = \sqrt{x}\,J_n(\beta x),$$

worin α, β von x unabhängig, sonst aber beliebige, auch veränderliche, von Null verschiedene Grössen sind. Dann ergiebt sich aus §. 69 (14)

$$\varphi = \alpha^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}, \qquad \psi = \beta^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2},$$

$$\psi - \varphi = \beta^2 - \alpha^2.$$

Die linke Seite der Formel (2) wird jetzt

(3) $$x\left(J_n(\beta x)\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} - J_n(\alpha x)\frac{dJ_n(\beta x)}{dx}\right),$$

und es ist nach §. 69 (10) (wenn darin n in $n+1$ und x in αx und βx verwandelt wird)

$$\frac{dJ_n(\alpha x)}{dx} = \frac{n}{x}J_n(\alpha x) - \alpha J_{n+1}(\alpha x),$$

$$\frac{dJ_n(\beta x)}{dx} = \frac{n}{x}J_n(\beta x) - \beta J_{n+1}(\beta x),$$

woraus sich für (3) der Ausdruck ergiebt

$$x\,[\beta J_n(\alpha x)J_{n+1}(\beta x) - \alpha J_n(\beta x)J_{n+1}(\alpha x)].$$

Nimmt man daher die Formel (2) zwischen den Grenzen 0 und 1, so folgt

II. $$\beta J_n(\alpha)J_{n+1}(\beta) - \alpha J_n(\beta)J_{n+1}(\alpha)$$

$$= (\beta^2 - \alpha^2)\int_0^1 x\,J_n(\alpha x)\,J_n(\beta x)\,dx.$$

Diese Formel gilt auch noch, wenn eine der beiden Grössen α, β, etwa $\beta = 0$ ist. Denn ist $n > 0$, so verschwinden beide Seiten von II. und für $n = 0$ erhält man

$$\text{III.} \qquad \alpha J_1(\alpha) = \alpha^2 \int_0^1 x J_0(\alpha x)\, dx = \int_0^\alpha x J_0(x)\, dx,$$

was sich unmittelbar durch Integration von §. 69 (16) für $n = 1$ verificiren lässt.

Wenn $\beta = \alpha$ wird, so wird die Relation II. eine Identität. Wenn man aber zunächst in Bezug auf β differentiirt, und dann $\beta = \alpha$ setzt, so ergiebt sich eine weitere Relation:

$$\text{IV.} \qquad J_n(\alpha) J_{n+1}(\alpha) + \alpha\,[J_n(\alpha) J'_{n+1}(\alpha) - J'_n(\alpha) J_{n+1}(\alpha)]$$
$$= 2\alpha \int_0^1 x J_n(\alpha x)^2\, dx.$$

Diese Relationen finden mannigfache Anwendungen. Wir wollen sie zunächst dazu anwenden, die Wurzeln der transcendenten Gleichungen

$$J_n(x) = 0,$$

die wir auch kurz die Wurzeln der Functionen J_n nennen, zu discutiren.

§. 71.

Die Wurzeln von J_n.

Ueber die Wurzeln von J_n können wir zunächst Folgendes aussagen:

1. Der Werth $x = 0$ ist eine Wurzel von jeder der Functionen J_n, mit Ausnahme von J_0, und es ist $J_0(0) = 1$.

Dies folgt unmittelbar aus den Entwickelungen §. 68 (3), (4). Ebenso:

2. Ist α eine Wurzel von J_n, so ist auch $-\alpha$ eine Wurzel derselben Function.

3. $J_n(x)$ hat keine rein imaginären Wurzeln.

Denn setzen wir $x = ib$, worin b eine nicht verschwindende

reelle Grösse ist, so erhält die Reihe §. 68 (3) lauter Glieder von demselben Vorzeichen, und kann also nicht verschwinden.

4. J_n hat keine complexen Wurzeln.

Denn wenn $a + bi$ eine complexe Wurzel wäre, also $J_n(a + bi) = 0$, so müsste, da die Coëfficienten in der Entwickelung von $J(x)$ alle reell sind, auch $J_n(a - bi) = 0$ sein. Wenn aber a und b beide von Null verschieden sind, so ist $(a + bi)^2 - (a - bi)^2$ gleichfalls von Null verschieden. Setzen wir ferner

$$J_n[(a + bi)x] = U + iV, \quad J_n[(a - bi)x] = U - iV,$$

worin U, V für ein reelles x reell sind, so ist

$$J_n[(a + bi)x] J_n[(a - bi)x] = U^2 + V^2,$$

also wesentlich positiv.

Setzen wir daher in der Formel §. 70, II.

$$\alpha = a + bi, \quad \beta = a - bi, \quad J_n(\alpha) = 0, \quad J_n(\beta) = 0,$$

so folgt

$$\int_0^1 x(U^2 + V^2)\, dx = 0,$$

und dies ist unmöglich, da U und V nicht identisch verschwinden.

Wir haben uns also in der Folge nur noch mit den reellen positiven Wurzeln von J_n zu befassen.

5. Zwei auf einander folgende J_n, wie J_n und J_{n+1}, haben keine gemeinschaftliche Wurzel.

Denn wäre β eine solche gemeinschaftliche Wurzel, so würde aus §. 70, II. für jedes beliebige α folgen:

$$\int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x)\, dx = 0.$$

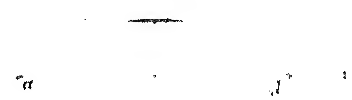
Dass dies aber unmöglich ist, erkennt man, wenn man α in β übergehen lässt.

Aus den Formeln §. 69 (16) oder (17) ergiebt sich hieraus noch als Corollar:

6. Keine Function J_n hat mit ihrer Derivirten eine positive Wurzel gemein ($x = 0$ ist eine mehrfache Wurzel von J_n, sobald $n > 1$ ist).

Bedeuten α und β zwei der Grösse nach auf einander folgende positive Wurzeln von J_n, so können wir uns $y = J_n(x)$ als Ordinate einer Curve darstellen, die in den Punkten α, β durch die Abscissenaxe geht. Es folgt daraus, dass der Differentialquotient y' zwischen α und β mindestens einmal Null wird oder mit Rücksicht auf §. 69 (16), dass in diesem Intervall mindestens eine Wurzel von J_{n+1} liegt. Ebenso aber schliessen wir aus §. 69 (14), dass in demselben Intervall eine Wurzel von J_{n-1} liegt, und aus der [illegible] dieser beiden [illegible] ersieht man, dass auch nur je

Fig. 33.



eine Wurzel von J_{n+1} und J_{n-1} im Intervall liegt. Denn angenommen, es liegen in dem Intervall zwei Wurzeln von J_{n-1}, etwa α', β', so müsste nach dem zweiten Satze in dem Intervall (α', β') auch eine Wurzel von J_n liegen, was der Annahme widerspricht, dass α und β zwei auf einander folgende Wurzeln von J_n seien. Aehnlich schliesst man für J_{n+1}. Also:

7. **Zwischen zwei auf einander folgenden positiven Wurzeln von J_n liegt eine und nur eine Wurzel sowohl von J_{n-1} als von J_{n+1}.**

Auf $n = 0$ angewandt, ergiebt sich [illegible], dass zwischen zwei auf einander folgenden Wurzeln von J_0 eine und nur eine Wurzel von J_1 liegt.

Ist α_n die kleinste positive Wurzel von J_n, so kann man, wenn $n > 0$ ist, aus §. 69 (16) schliessen, dass zwischen 0 und α_n eine Wurzel von J_{n-1} liegt, und aus 7. folgt, dass es nur eine sein kann und also die kleinste positive Wurzel α_{n-1} von J_{n-1} sein muss. Also haben wir noch den Satz:

8. **Die kleinsten positiven Wurzeln α_n von J_n wachsen mit n zugleich. Zwischen 0 und α_n liegt nur die eine Wurzel α_{n-1} von J_{n-1}.**

Dass die Wurzeln von J_n mit n [illegible] wachsen, ersieht man aus der Reihe

$$1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2n + 2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n + 2)(2n + 4)} - \cdots,$$

die sich für jedes endliche x mit unendlich wachsendem n der Grenze 1 nähert.

Hiernach erhalten wir folgendes Bild von der Lage der Wurzeln von J_n. Es seien

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''' \ldots$$

die der Grösse nach geordneten Wurzeln von J_0,

$$\alpha_1,\ \alpha_1',\ \alpha_1'',\ \alpha_1''' \ldots$$

die in gleicher Weise geordneten Wurzeln von J_1, dann ist

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha' < \alpha_1' < \alpha'' < \alpha_1'' < \ldots,$$

und Entsprechendes gilt für die Wurzeln von J_2:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_1' < \alpha_2' < \alpha_1'' < \alpha_2'' < \ldots$$

und ebenso für die höheren J_n.

Endlich können wir noch über die Wurzeln von $J_0(x)$ einen Schluss machen.

Wir setzen in der Formel §. 70 (1) und (2)

$$u = \sqrt{x}\, J_0(x), \qquad v = \sin(x - \alpha),$$

worin α eine positive oder verschwindende Wurzel von $\sqrt{x}\, J_0(x)$ ist. Dann ergiebt sich

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{x}\,\frac{dJ_0(x)}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\, J_0(x), \quad \frac{dv}{dx} = \cos(x - \alpha)$$

und in §. 70, I. ist

$$\varphi = 1 + \frac{1}{4x^2}, \quad \psi = 1, \quad \psi - \varphi = -\frac{1}{4x^2}$$

zu setzen. Dann wird diese Formel, wenn wir α als untere Grenze nehmen

$$\sqrt{x}\sin(x - \alpha)\frac{dJ_0(x)}{dx} + \frac{\sin(x - \alpha)}{2\sqrt{x}}\, J_0(x) - \sqrt{x}\cos(x - \alpha)\, J_0(x)$$

$$= -\int_\alpha^x \frac{\sin(x - \alpha)}{4\sqrt{x^3}}\, J_0(x)\, dx,$$

und wenn man $x = \alpha + \pi$ setzt

$$(1) \qquad \sqrt{\alpha + \pi}\, J_0(\alpha + \pi) = -\int_\alpha^{\alpha+\pi} \frac{\sin(x - \alpha)}{4\sqrt{x^3}}\, J_0(x)\, dx.$$

Hieraus folgt, dass $J_0(x)$ nicht in dem ganzen Intervall $(\alpha, \alpha + \pi)$, in dem $\sin(x - \alpha)$ positiv ist, einerlei Zeichen haben kann, weil sonst die linke Seite von (1) das entgegengesetzte Vorzeichen hätte wie die rechte, d. h. es muss zwischen α und

$\alpha + \pi$ eine zweite Wurzel von $J(x)$ liegen. Damit ist bewiesen:

9. **Die Function $J(x)$ hat unendlich viele positive Wurzeln. Die kleinste von ihnen ist kleiner als π und der Abstand je zweier auf einander folgender ist ebenfalls kleiner als π.**

Nach den von Hansen berechneten Tabellen ergiebt sich für die kleinste positive Wurzel von $J(x)$ der Werth

$$\alpha = 2,4048,$$

und man erhält auf zwei Decimalstellen genau

		Differenz
α	2,405	
		3,115
α'	5,520	
		3,134
α''	8,654	
		3,137
α'''	11,791	
		3,140
α^{IV}	14,931	
		3,140
α^{V}	18,071	

Man sieht, dass sich die Differenzen sehr bald der Grenze π ziemlich schnell annähern.

§. 72.

Die Function $J(x)$.

Der Einfachheit halber betrachten wir jetzt nur noch die in Anwendungen am meisten vorkommende Bessel'sche Function J_0 der Ordnung 0, die wir auch mit $J(x)$ bezeichnen, und die der Differentialgleichung §. 69 (15)

$$\frac{d^2 \sqrt{x}\, J(x)}{dx^2} + \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) \sqrt{x}\, J(x) = 0 \tag{1}$$

genügt, die wir in den vorangehenden Paragraphen durch verschiedene Ausdrücke für alle endlichen, reellen sowohl als complexen, Werthe von x dargestellt haben. Es handelt sich zunächst

[1]) Abgedruckt in der Schrift von Lommel: „Studien über die Bessel'schen Functionen". Leipzig 1868. Zusammenfassende Darstellungen: Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig 1867. Gray and Mathews. A treatise on Bessel functions. London 1895.

die Frage nach dem zweiten particularen Integral der Differentialgleichung (1) auf. Wir gehen dabei aus von dem Ausdrucke §. 68 (6):

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix\cos\omega}\, d\omega,$$

wofür auch

$$(2) \qquad J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-ix\cos\omega}\, d\omega$$

gesetzt werden kann, und wenn wir hierin die Substitution

$$\cos\omega = 1 - 2s, \quad d\omega = \frac{ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

machen, so ergiebt sich

$$(3) \qquad J(x) = \frac{e^{-ix}}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{2ixs}\, ds}{\sqrt{s(1-s)}}.$$

Wenn wir nun eine Function

$$(4) \qquad U = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\int_0^1 \frac{e^{zs}\, ds}{\sqrt{s(1-s)}}$$

einführen, so ergiebt sich, wenn

$$(5) \qquad 2ix = z$$

gesetzt wird:

$$(6) \qquad \sqrt{2ix\pi}\, J(x) = e^{\frac{z}{2}}\, U,$$

und wenn man dies in die Gleichung (1) einführt, und die Differentiation nach x durch die nach z ersetzt, so folgt für U die Differentialgleichung:

$$(7) \qquad \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{dU}{dz} + \frac{1}{4z^2}\, U = 0.$$

Es ist aber nach (4)

$$(8) \quad \frac{d^2 U}{dz^2} - \frac{dU}{dz} + \frac{1}{4z^2}\, U = \frac{1}{\sqrt{\pi z}}\int_0^1 \frac{e^{zs}\, ds}{\sqrt{s(1-s)}}\left[-\frac{1}{2} + s - zs(1-s)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\int_0^1 \frac{d}{ds}\left[e^{zs}\sqrt{s(1-s)}\right] ds.$$

wonach also die Differentialgleichung (7) thatsächlich befriedigt ist. Man sieht aber hieraus noch weiter, dass, sobald z einen positiven reellen Theil hat, die Differentialgleichung (7) auch dann noch befriedigt ist, wenn in dem Ausdrucke U an Stelle der Grenzen 0 und 1 irgend zwei der Grenzen 0, 1, $-\infty$ genommen werden, dass also z. B. auch die Function

$$S(z) = \sqrt{\frac{z}{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{zs}\, ds}{\sqrt{-s(1-s)}} \tag{9}$$

der Differentialgleichung (7) genügt, und wenn man dann in (6) an Stelle von U die Function S setzt, so erhält man ein zweites particulares Integral der Differentialgleichung (1).

Die Function $S(z)$ betrachten wir also jetzt näher. Wir formen sie erst etwas um, indem wir für $-zs$ eine neue Integrationsvariable, die wir gleichfalls mit s bezeichnen, einführen, wodurch sich ergiebt

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(1+\frac{s}{z}\right)}}. \tag{10}$$

Bei der Integration soll hierin die Variable s alle reellen positiven Werthe durchlaufen. Zur Bestimmung des Vorzeichens nehmen wir an, dass dabei $\sqrt{s}$ positiv sei, dass $\sqrt{1+s/z}$ für $s=0$ den Werth $+1$ habe und sich mit s nach der Stetigkeit ändere, und dass die Quadratwurzel unter dem Integral (10) das Product dieser beiden Wurzeln sein soll. Dann hat das Integral (10) für jedes z einen völlig bestimmten Werth, ausgenommen für ein reelles negatives z, wofür zwei verschiedene Werthe möglich sind, nämlich

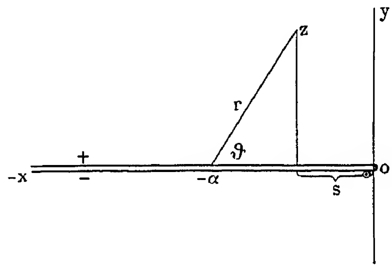
$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-z} \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(1+\frac{s}{z}\right)}} \pm \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{-s\left(\frac{s}{z}+1\right)}}, \tag{11}$$

wenn jetzt die Wurzeln alle positiv genommen sind.

Will man also $S(z)$ zu einer eindeutigen Function von z machen, so muss man in der Ebene, in der nach §. 45 die complexe Variable z dargestellt wird, längs der Axe der negativen reellen Zahlen einen Schnitt legen, dessen beide Seiten wir als die positive und die negative unterscheiden wollen, an dem

jeder der beiden Werthe (11) stattfinden kann. Ausserhalb dieses Schnittes ist dann die Function $S(z)$ überall eindeutig und stetig bestimmt, und je nachdem man sich von der positiven oder von der negativen Seite her dem Schnitte nähert, erhält man den einen oder den anderen der Werthe (11). Wenn wir nämlich $z = -a + bi$ setzen, a reell und positiv und b auf der positiven Seite des Schnittes positiv, auf der negativen negativ annehmen, ferner

Fig. 34.



$$a - s = r\cos\vartheta, \quad b = r\sin\vartheta$$

setzen (s. Fig. 34), so ist, wenn

$$1. \quad s < a, \quad b > 0: \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2},$$

$$2. \quad s > a, \quad b > 0: \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi,$$

und ϑ nähert sich, wenn sich b von positiven Werthen her der Grenze Null nähert, im Falle 1. dem Werthe 0, im Falle 2. dem Werthe π. Es ist dann weiter

$$\sqrt{\frac{s}{z} + 1} = \frac{\sqrt{a - s - bi}}{\sqrt{a - bi}} = \frac{\sqrt{r}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} - i\sin\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{a - bi}},$$

und hierin muss, da die Quadratwurzel für $s = 0$ in $+1$ übergehen soll, die $\sqrt{a - bi}$ so genommen werden, dass sie für $b = 0$ in den positiven Werth $\sqrt{a}$ übergeht, wenn $\sqrt{r}$ positiv genommen wird. Lassen wir also b von positiven Werthen in Null übergehen, so wird

$$1. \quad s < a: \quad \sqrt{\frac{s}{z} + 1} = \frac{\sqrt{a - s}}{\sqrt{a}},$$

$$2. \quad s > a: \quad \sqrt{\frac{s}{z} + 1} = -i\frac{\sqrt{s - a}}{\sqrt{a}}$$

mit positiven Zeichen der Quadratwurzeln. Ebenso aber kann man schliessen, dass, wenn b von negativen Werthen her in Null übergeht, im zweiten Falle $-i$ an Stelle von i zu treten hat. Daraus ergiebt sich:

In der Formel (14) gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem man sich von der positiven oder der negativen Seite her dem Schnitte nähert.

§. 73.

Darstellung der Bessel'schen Functionen durch die Function $S(z)$.

Mit Hülfe der Function $S(z)$ lässt sich zunächst die Differentialgleichung der Bessel'schen Function J vollständig integriren, d. h. es lässt sich auch das zweite particulare Integral finden. Diese Gleichung lautet nach §. 69 (13)

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx} + \Phi = 0, \tag{1}$$

und hat als erstes particulares Integral die Function J, die sich nach §. 72 (3) in der Form darstellen lässt:

$$J(x) = \frac{e^{-ix}}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{2ixs}ds}{\sqrt{s(1-s)}}, \tag{2}$$

ein Ausdruck, der für alle complexen Werthe von x gilt. Nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen ist aber ein zweites davon verschiedenes Integral von (1)

$$\Phi = \frac{e^{-ix}}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{e^{2ixs}ds}{\sqrt{-s(1-s)}} = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2ix\pi}}S(2ix). \tag{3}$$

Diese Function ist aber nicht mehr in der ganzen x-Ebene eindeutig, sondern sie hat da, wo $z = 2ix$ negativ, also x positiv imaginär ist, die oben festgestellten beiden verschiedenen Werthe §. 72 (11). Wir geben dieser Formel noch eine etwas andere Gestalt. Ist z reell und negativ, so ergiebt sich durch die Substitution $-sz$, $-zds$ für s und ds:

$$\int_0^{-z} \frac{e^{-s}ds}{\sqrt{s\left(1+\frac{s}{z}\right)}} = \sqrt{-z}\int_0^1 \frac{e^{sz}\,ds}{\sqrt{s(1-s)}} = \pi\sqrt{-z}\,e^{\frac{z}{2}}J\left(\frac{z}{2i}\right),$$

worin $\sqrt{-z}$ positiv ist; und durch die Substitution $s - z$ für s

$$\int_z \sqrt{-s\left(\frac{s}{z}+1\right)} \qquad \int_0 \sqrt{s\left(1-\frac{s}{z}\right)}$$

und es ergiebt sich aus §. 72 (11)

$$(4) \qquad S(z) = \sqrt{-\pi z}\, e^{\frac{z}{2}} J\left(\frac{z}{2i}\right) + i e^{z} S(-z).$$

Hierin ist unter $S(z)$ der Werth zu verstehen, den die Function S annimmt, wenn man sich von der positiv imaginären Seite her dem negativen reellen Werthe z annähert. Nach §. 49 gilt aber die Formel (4) auch für complexe Werthe z, soweit die darin vorkommenden Functionen stetig sind. Die Function J hat aber überhaupt keine Unstetigkeit, während die Functionen $S(z)$ und $S(-z)$ nur beim Ueberschreiten der reellen Axe, und zwar die erste auf der negativen, die zweite auf der positiven Seite, unstetig werden. Demnach gilt die Formel (4) für alle z mit positivem imaginärem Bestandtheile.

Führt man wieder x durch die Formel $z = 2ix$ ein, so gilt also die Formel (4) in der Halbebene, in der x einen positiven reellen Theil hat.

Um die Quadratwurzel richtig zu bestimmen, setzen wir

$$x = \varrho e^{i\varphi}, \quad \varrho > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$-z = 2\varrho e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad \sqrt{-z} = \sqrt{2\varrho}\, e^{\frac{i\varphi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2x}\, e^{-\frac{i\pi}{4}},$$

worin $\sqrt{x}$ einen positiven reellen Bestandtheil hat, und es ergiebt sich aus (4)

$$(5) \qquad \sqrt{2\pi x}\, J(x) = e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} S(2ix) + e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} S(-2ix),$$

eine Formel, die gültig ist, so lange x einen positiven reellen Bestandtheil hat, wenn $\sqrt{2\pi x}$ so genommen wird, dass es ebenfalls einen positiven reellen Bestandtheil hat.

Da nun hier jeder der beiden Bestandtheile auf der rechten Seite der Differentialgleichung §. 72 (1) genügt, so können wir als **Bessel'sche Functionen zweiter Art**, d. h. als zweites particulares Integral der Differentialgleichung für die Function J eine Function $K(x)$ definiren durch

$$(6) \qquad i\sqrt{2\pi x}\, K(x) = e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} S(2ix) - e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} S(-2ix).$$

Wenn x reell und positiv ist, kann man diesen Ausdrücken für die Function $J(x)$ und $K(x)$ eine elegante Gestalt geben.

Wir gehen aus von der Definition §. 72 (10):

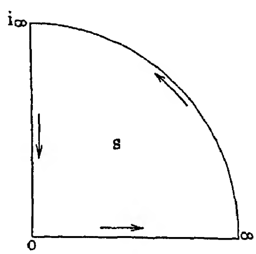
$$(7) \qquad S(2ix) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(1 + \frac{s}{2ix}\right)}},$$

und setzen darin

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{s}{ix} &= \xi - 1, \\ 2 + \frac{s}{ix} &= \xi + 1. \end{aligned}$$

Nehmen wir x reell und positiv an, und lassen ξ reell von 1 bis ∞ gehen, so geht s durch rein imaginäre Werthe von 0 bis $i\infty$. Nun war zwar in (7) s reell genommen; aber mit Anwendung der Sätze über die Integration auf complexem Wege (§. 47) kann man auch für s den Integrationsweg von 0 bis $i\infty$ wählen. Denn in dem Kreisquadranten $0, \infty, i\infty$ in der Ebene der complexen Variablen s hat die Function, die in (7) unter dem Integralzeichen steht, keinen Unstetigkeitspunkt, und folglich ist das über die Begrenzung dieses Quadranten genommene Integral gleich Null.

Fig. 35.



Es verschwindet aber ferner das über die Kreislinie genommene Integral, wenn der Radius unendlich wird, und folglich können die beiden Integrationswege $0, \infty$ und $0, i\infty$ durch einander ersetzt werden. Nun ist nach (8) auf der Linie $0, i\infty$

$$\sqrt{s} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{x}\, \sqrt{\xi - 1},$$

$$\sqrt{2}\, \sqrt{1 + \frac{s}{2ix}} = \sqrt{\xi + 1},$$

$$ds = ix\, d\xi,$$

und es ergiebt sich also aus (7)

$$S(2ix) = i\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \int_1^\infty \frac{e^{-ix\xi}\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}},$$

und wenn man i in $-i$ verwandelt:

$$S(-2ix) = -i\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} \int_1^\infty \frac{e^{ix\xi}\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}.$$

Setzt man dies in (5) und (6) ein, so erhält man

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} J(x) &= \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\sin x\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}, \\ K(x) &= \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\cos x\xi\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}. \end{aligned}$$

§. 74.

Potenzentwickelung für die Function $S(z)$.

Die durch das Integral §. 72 (10) definirte Function $S(z)$:

$$\text{(1)}\qquad S(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(1+\frac{s}{z}\right)}} = \sqrt{\frac{z}{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s(z+s)}}$$

nähert sich für ein unendlich wachsendes z dem Grenzwerthe 1 (§. 12), und der erste Differentialquotient von $S(z)$ nach z wird für ein unendlich grosses z unendlich klein.

Für $z = 0$ erhält $S(z)$ den unbestimmten Ausdruck $0 \times \infty$. Eine partielle Integration giebt uns aber Aufschluss über das Verhalten der Function für $z = 0$.

Man erhält nämlich durch Differentiation noch s:

$$d\left[e^{-s}\log\left(\sqrt{s}+\sqrt{z+s}\right)\right]$$

$$= -e^{-s}\log\left(\sqrt{s}+\sqrt{z+s}\right) ds + \frac{e^{-s}\, ds}{2\sqrt{s(z+s)}},$$

und daraus durch Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞:

$$(2)\qquad \log z = 2\int_0^\infty e^{-s}\log(\sqrt{s}+\sqrt{z+s})\,ds - \int_0^\infty \frac{e^{-s}\,ds}{\sqrt{s}\,\sqrt{z+s}}.$$

Ist z reell und positiv, so sind die Logarithmen hier reell zu nehmen. Dadurch sind sie durch die Stetigkeit in der ganzen z-Ebene bis an den längs der negativen reellen Axe verlaufenden Schnitt eindeutig bestimmt.

Wenn z in Null übergeht, so wird

$$2\int_0^\infty e^{-s}\log(\sqrt{s}+\sqrt{z+s})\,ds = \int_0^\infty e^{-s}\log 4s\,ds = 2\log 2 - C,$$

worin C die Euler'sche Constante 0,577... bedeutet (§ 23 (13)), und wir erhalten also aus (1) und (2) das Theorem

$$(3)\qquad \lim_{z=0}\left\{\frac{2}{\pi}S(z) + \log z\right\} = 2\log 2 - C.$$

Diese Grenzbestimmung bahnt uns den Weg zu einer neuen Entwickelung der Function $S(z)$ und damit also auch der Bessel'schen Functionen $J(x)$ und $K(x)$. Diese sind nämlich Lösungen der Differentialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx} + \Phi = 0,$$

die durch die Function

$$(5)\qquad J(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}$$

befriedigt wird. Um die Gleichung (4) allgemein zu integriren, machen wir den Ansatz

$$(6)\qquad \Phi(x) = J(x)\log x + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu c_\nu}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu},$$

worin die unbestimmten Coefficienten c_ν so zu bestimmen sind, dass die Differentialgleichung (4) durch (6) befriedigt wird. Durch Differentiation von (6) ergiebt sich

$$(7)\qquad \frac{d\Phi}{dx} = \frac{dJ}{dx}\log x + \frac{1}{x}J(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu \nu c_\nu}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu-1},$$

oder, wenn man durch x dividirt, und dann unter dem Summenzeichen ν durch $\nu+1$ ersetzt:

$$(8)\qquad \frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx}\log x + \frac{1}{x^2}J(x)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu c_{\nu+1}}{\Pi(\nu)^2(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu},$$

und durch nochmalige Differentiation von (7)

$$(9)\qquad \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{d^2J}{dx^2}\log x + \frac{2}{x}\frac{dJ}{dx} - \frac{1}{x^2}J(x)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu c_{\nu+1}(2\nu+1)}{\Pi(\nu)^2(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu}.$$

Addirt man (6), (8), (9), so ergiebt sich, da J der Differentialgleichung (4) genügt, für die c_ν die Bedingung

$$(10)\qquad \frac{2}{x}\frac{dJ}{dx} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu(c_{\nu+1}-c_\nu)}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = 0.$$

Andererseits erhält man aus (5)

$$(11)\qquad \frac{2}{x}\frac{dJ}{dx} = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\Pi(\nu)^2(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu},$$

und die Vergleichung von (10) und (11) ergiebt

$$(12)\qquad c_{\nu+1} - c_\nu = \frac{1}{\nu+1},$$

woraus man allgemein schliesst

$$(13)\qquad c_\nu = c_0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu}.$$

Die so gebildete Reihe (6) ist für alle Werthe von x convergent, weil der Coëfficient c_ν mit unendlich wachsendem ν nur unendlich wird, wie $\log\nu$ [§. 23 (7)].

Die Constante c_0 bleibt der Natur der Sache nach unbestimmt, denn ändert man c_0 in c_0', so tritt zu Φ nur ein Glied der Form $(c_0 - c_0')\,J(x)$ hinzu, was gleichfalls der Differentialgleichung (4) genügt.

Nun ist aber nach §. 72 (6), (9)

$$e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\,S(z),$$

wenn $z = 2ix$ gesetzt wird, gleichfalls ein Integral von (4) und

muss also in der Form $A\Phi(x) + BJ(x)$ darstellbar sein. Die Constante B können wir $= 0$ annehmen, wenn wir über c_3 dementsprechend verfügen. Die Vergleichung des Unendlich von $\Phi(x)$ und $S(z)$ [Formel (3) und (6)] zeigt dann, dass $A = -1$ sein muss und man hat also:

$$(14) \qquad e^{-\frac{z}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu - \log z}{\Pi(\nu)^2} \left(\frac{z}{4}\right)^{2\nu},$$

und aus der Grenzgleichung (3) folgt

$$(15) \qquad c_0 = 2 \log 2 - C.$$

§. 75.

Obere Grenze für die Function $S(z)$.

Es ist nun weiter zu untersuchen, wie sich die Function $S(z)$ verhält, wenn z ins Unendliche wächst. Diese Betrachtung bahnt uns den Weg zur Ableitung gewisser Reihenentwickelungen, die nach fallenden Potenzen von z fortschreiten, die sich, obwohl sie nur halb convergent sind, zur Berechnung von $S(z)$ für grosse Werthe von z eignen.

Wir machen Gebrauch von dem bekannten Satze, dass der absolute Werth einer Summe zweier complexer Ausdrücke seiner Grösse nach zwischen der Summe und der Differenz der absoluten Werthe der Summanden liegt, und dass der absolute Werth einer beliebigen Summe, also auch eines Integrals, nicht grösser ist, als die Summe der absoluten Werthe der Summanden.

Ist also r der absolute Werth von z, so ist der absolute Werth von $1 + \frac{s}{z}$ für ein positives s grösser als $1 - \frac{s}{r}$ oder $\frac{s}{r} - 1$ (je nachdem s kleiner oder grösser als r ist), und demnach ist nach §. 74 (1)

$$(1) \qquad \text{Absoluter Werth von } S(z) \gtreqless$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^r \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(1 - \frac{s}{r}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_r^\infty \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s\left(\frac{s}{r} - 1\right)}}.$$

Macht man die Substitution sr für s, und setzt

$$A = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(1-s)}}, \qquad B = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_1^\infty \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(s-1)}},$$

so ist also der absolute Werth von $S(z)$ nicht grösser als $A + B$. Wir betrachten zunächst den Ausdruck B. Da in diesem Integral s immer grösser als 1 ist, so folgt

$$B < \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_1^\infty \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s-1}},$$

und wenn man s durch $s+1$ ersetzt:

$$B < \sqrt{\frac{r}{\pi}}\, e^{-r} \int_0^\infty \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s}},$$

also nach §. 12

(2) $$B < e^{-r} < 1.$$

Weniger einfach ist die Betrachtung von A.

Wir verstehen unter c einen beliebigen echten Bruch und setzen

$$A = \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^c \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(1-s)}} + \sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_c^1 \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(1-s)}}.$$

Hier ist nun, da in dem ersten Integral $1 - s > 1 - c$,

$$\sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_0^c \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(1-s)}} < \sqrt{\frac{r}{\pi\,(1-c)}} \int_0^c \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s}}$$

$$< \sqrt{\frac{r}{\pi\,(1-c)}} \int_0^\infty \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{1-c}}$$

$$\sqrt{\frac{r}{\pi}} \int_c^1 \frac{e^{-rs}\,ds}{\sqrt{s\,(1-s)}} < \sqrt{\frac{r}{\pi}}\, e^{-rc} \int_c^1 \frac{ds}{\sqrt{s\,(1-s)}}$$

$$< \sqrt{\frac{r}{\pi}}\, e^{-rc} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s\,(1-s)}} = \sqrt{r\pi}\, e^{-rc},$$

und es ergiebt sich also, dass der absolute Werth von $S(z)$ kleiner ist als

$$[illegible]$$

Nun hat die Function [illegible] einen Minimalwerth für $r = 1/2e$, wie man leicht durch Differentiation findet, und es ist also der absolute Werth von S [illegible] kleiner als

$$[illegible]$$

Hierin kann nun e ein beliebiger echter Bruch sein, und wenn man e von 0 bis 1 gehen lässt, so erhält dieser Ausdruck einen Minimumwerth. Es kommt aber hier nicht auf die genaueste Grenzbestimmung an, und es genügt, wenn wir etwa $e = 1/2$ setzen, wodurch der vorstehende Ausdruck kleiner als 3,5 wird. Wir haben also den Satz:

Der absolute Werth der Function $S(z)$ liegt für alle reellen und imaginären Werthe von z unter einer endlichen Grenze, die kleiner als 3,5 ist.

§. 76.

Halbconvergente Reihe für $S(z)$.

Die Differentialgleichung [illegible]

(1) $$[illegible]$$

wird befriedigt durch

$$U = S(z)$$

und

$$[illegible]$$

und folglich sind nach § 73 [illegible] zwei particuläre Lösungen dieser Gleichung:

(2) $$S_1 = S(z), \quad S_2 = [illegible]$$

Die Function $S(z)$ war in der ganzen Ebene eindeutig bestimmt, und hatte an der negativen reellen Axe eine Unstetigkeit, während $S(-z)$ seine Unstetigkeit an der positiven reellen [illegible]

ist aber sowohl S_1 als S_2 eindeutig bestimmt und ändert sich stetig, so lange die reelle Axe nicht überschritten wird. Wir versuchen jetzt die Differentialgleichung (1) durch eine nach fallenden Potenzen von z fortschreitende Reihe zu integriren, und setzen, wenn a_ν die noch zu bestimmenden Coëfficienten sind:

$$U = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu z^{-\nu},$$

$$(3) \quad \frac{dU}{dz} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu \nu z^{-\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_{\nu+1} (\nu+1) z^{-\nu-2},$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu \nu (\nu+1) z^{-\nu-2}.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung ein, so ergiebt sich:

$$(4) \quad 0 = \sum (-1)^\nu \left[a_{\nu+1}(\nu+1) - a_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 \right] z^{-\nu-2}.$$

Man hat also

$$a_{\nu+1} = \frac{(2\nu+1)^2}{\nu+1} \frac{a_\nu}{4}$$

zu setzen, und daraus findet man, wenn man $a_0 = 1$ annimmt:

$$a_\nu = \frac{(1 \, . \, 3 \ldots 2\nu - 1)^2}{1 \, . \, 2 \ldots \nu \, . \, 2^{2\nu}}.$$

Dafür kann man auch setzen:

$$(5) \qquad a_\nu = \frac{\Pi(2\nu)^2}{2^{4\nu} \Pi(\nu)^3}.$$

Nach einer schon früher angewandten Formel (§. 26) ist aber für grosse n näherungsweise

$$(6) \qquad \Pi(n) = \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}},$$

wobei als Correction ein sich der Einheit nähernder Factor hinzutritt, dessen Logarithmus kleiner ist als $1/12n$, und daraus erhält man für grosse Werthe von n den genähert richtigen Ausdruck

$$(7) \qquad a_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-n} n^{n-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{n(\log n - 1)},$$

ein Ausdruck, der mit unendlich wachsendem z stärker unendlich wird, als die n^{te} Potenz jeder endlichen Grösse, und folglich ist die Reihe (3), die wir für U angenommen haben, für jedes endliche z divergent.

Um aber den Ausdruck U, der, wie man sieht, der Differentialgleichung formell genügt, wiewohl er an sich keine Bedeutung hat, für die Theorie der Bessel'schen Functionen verwerthen zu können, nehmen wir eine beliebige ganze Zahl n an, und setzen

$$U_n = \sum_{\nu=0}^{n} [illegible]$$

(8)
$$\frac{dU_n}{dz} = \sum_{\nu=0}^{n} [illegible]$$

$$\frac{d^2U_n}{dz^2} = \sum_{\nu=0}^{n} [illegible]$$

und hieraus ergiebt sich nach (1) für U_n die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$(9) \qquad \frac{d^2U_n}{dz^2} + \frac{dU_n}{dz} + \frac{1}{[illegible]} U_n = [illegible]$$

Diese Differentialgleichung wollen wir nun nach der Methode des §. 62 [Formel (12)] integriren.

Die beiden particularen Integrale der verkürzten Gleichung, die wir dort mit v_1, v_2 bezeichnet haben, sind hier S_1, S_2, und da hier $a = -1$ ist, so haben wir nach §. 62 (11) und nach (2)

$$A = Ce^{z} = S_1 \frac{dS_2}{dz} - S_2 \frac{dS_1}{dz}$$

$$= e^{z} \left| S(z) \frac{dS(-z)}{dz} - [illegible] \right|.$$

Es ist also

$$S(z) \frac{dS(-z)}{dz} - S(-z) \frac{dS(z)}{dz} = [illegible]$$

eine Constante, für die man nach §. 74 [illegible] den Werth 1 erhält, und mithin ist A [illegible] zu setzen. Es ergiebt sich dann, wenn wir die Integrationsvariable mit ζ bezeichnen:

$$(10)\quad U_n = (-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a_n\int_c^z [e^{\zeta - z} S(\zeta)S(-z) - S(z)S(-\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta^{n+2}}$$
$$+ A\,S(z) + B e^z S(-z).$$

Hierin können wir c beliebig wählen; dann aber sind die Constanten A, B durch U_n und $S(z)$ völlig bestimmt.

Für $z = \pm i\infty$ wird nun $U_n = 1$, $S(z) = 1$, $e^z S(-z)$ unbestimmt; wenn wir also c so wählen, dass das Integral für $z = \pm i\infty$ verschwindet, so ergiebt sich $A = 1$, $B = 0$. Wir setzen nun, je nachdem der imaginäre Theil von z positiv oder negativ ist

$$\zeta = z \pm it,$$

wobei, wenn z reell sein sollte, die Wahl des Zeichens beliebig ist, und lassen t als Integrationsvariable durch reelle positive Werthe von 0 bis ∞ gehen, so dass ζ die reelle Axe nicht überschreitet. Dann ergiebt sich aus (10)

$$(11)\qquad S(z) = U_n +$$
$$(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a_n\int_0^\infty \frac{\pm i\,dt}{(z\pm it)^{n+2}}[e^{\pm it}S(z\pm it)S(-z) - S(-z\mp it)S(z)],$$

und es kommt jetzt noch darauf an, den absoluten Werth dieses Integrals in Bezug auf seine Grösse zu schätzen. Setzen wir

$$z = a + bi, \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

mit positivem b, so ist r der absolute Werth von z und es ist der absolute Werth von $z + it$, da b und t positiv sind:

$$\sqrt{a^2+(b+t)^2} = \sqrt{r^2+t^2+2bt} > \sqrt{r^2+t^2}.$$

Ferner ist nach dem in §. 75 bewiesenen Theorem, da der absolute Werth von $e^{\pm it}$ gleich 1 ist, der absolute Werth von

$$i\,(e^{\pm it})S(z \pm it)S(-z) - S(-z \mp it)S(z)$$

kleiner als $2g^2$ ($g = 3{,}5$) und mithin ist der absolute Werth des Fehlers, den man begeht, wenn man $S(z)$ durch U_n ersetzt, kleiner als

$$2g^2\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a_n\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{r^2+t^2}^{\,n+2}},$$

oder, wenn man t durch rt ersetzt, kleiner als

(12) $$\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{2\, g^2 a_n}{r^{n+1}} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}^{\,n+2}}.$$

Das hierin vorkommende Integral geht durch die Substitution $t = \operatorname{tg} \omega$ in folgendes über

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}^{\,n+2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega^n \, d\omega$$

und ist also immer kleiner als $1/2\, \pi$. Wir finden aber einen asymptotischen Ausdruck für unendlich wachsende n, wenn wir die Substitution machen

$$t^2 = \frac{2s}{n}, \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2ns}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}^{\,n+2}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}\left(1 + \frac{2s}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{2s}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} = e^s$$

und folglich

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}\left(1 + \frac{2s}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}} = \int_0^\infty \frac{e^{-s}\, ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{\pi},$$

also ist angenähert

(13) $$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}^{\,n+2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Wenn wir also endlich in (12) für a_n den genäherten Werth (7) und für $n + 1/2$ das genäherte n setzen, so ergiebt sich als asymptotischer Werth für die Fehlergrenze

(14) $$\Theta = 2\, g^2 e^{-n} \left(\frac{n}{r}\right)^{n+1}.$$

Dieser Ausdruck wird zwar bei festgehaltenem r mit unendlich wachsendem n unendlich gross. Wenn aber $n < r$ ist, so kann er doch, wenn r hinlänglich gross ist, unter einen beliebig

gegebenen Werth herunter gebracht werden. Wir haben daher das folgende Theorem:

1. Die Entwickelung

$$(15)\qquad S(z) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{\Pi(2\nu)^2}{\Pi(\nu)^3} \frac{1}{(4z)^\nu}$$

ist, wenn n nicht grösser als der absolute Werth r von t ist, richtig bis auf einen Fehler von der Ordnung ω.

Dieser Satz ist richtig in der ganzen Ebene z, und da die Summe auf der rechten Seite von (14) als rationale gebrochene Function von z stetig ist, so folgt, dass die Unstetigkeit, die, wie wir gesehen haben, der Function $S(z)$ anhaftet, nur in dem Correctionsgliede enthalten sein kann. Setzt man $n = 1$, so folgt, dass man $S(z)$ bis auf eine Grösse von der Ordnung $2g^2e^{-1}r^{-2}$ gleich 1 setzen kann.

Aus den Formeln (5), (6) §. 73 kann man dann entsprechende Entwickelungen für die Functionen $J(x)$, $K(x)$ erhalten, und wir führen hier den Satz an:

2. Für unendlich grosse x ist genähert, d. h. bis auf einen Fehler von der Grösse

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, g^2 e^{-1} x^{-\frac{3}{2}}:$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} J(x) &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}, \\ K(x) &= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}, \end{aligned}$$

was sowohl für reelle als für complexe x gültig bleibt.

§. 77.

Bestimmte Integrale mit Bessel'schen Functionen. Erstes Beispiel.

Die Bessel'schen Functionen haben nebst manchen anderen Analogien auch noch die Aehnlichkeit mit den trigonometrischen

Functionen, dass sich manche [illegible], in denen diese Functionen vorkommen, einfach [illegible]. Wir geben hiervon einige Beispiele.

Gehen wir aus von der [illegible] $J(x)$, die wir in §. 72 (2) gegeben haben:

(1) $$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [illegible]$$

so erhalten wir nach Umkehrung [illegible] mit Benutzung von §. 14 (4)

(2) $$\int_0^{\infty} e^{[illegible]} J(bx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} du \int_0^{\infty} [illegible]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{du}{[illegible]} = \frac{1}{\sqrt{[illegible]}}$$

Hierin sind a, b Constanten [illegible] positiv vorausgesetzt. Nach dem Satze [illegible] auch noch Uebereinstimmung der rechten und [illegible] complexe Werthe von a stattfinden, [illegible] stetige Functionen der complexen Variablen [illegible] findet aber statt, so lange der reelle Theil [illegible] und der reelle Theil von $\sqrt{a^2 + b^2}$, der dann nicht [illegible], gleichfalls positiv ist. Setzen wir also [illegible], so folgt

$$\int_0^{\infty} e^{-(a [illegible])} J(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 [illegible] b^2 [illegible]}}$$

Nun bleibt das Integral für [illegible] convergent, wenn [illegible] von b verschieden ist, wie sich aus dem [illegible] Ausdruck §. 76 (16) nach §. 7 ergiebt, und wir [illegible] in Null übergehen lassen. Um [illegible] der rechten Seite zu finden, setzen wir

(3) $$[illegible]$$

und erhalten:

(4) $$\frac{1}{\sqrt{a^2 [illegible] b^2 [illegible]}} = [illegible]$$

Nehmen wir ε und a positiv an, so liegt φ zwischen Null und π, und in (4) ist $\sqrt{r}$ positiv zu nehmen. Wenn aber ε in Null übergeht, so nähert sich φ der Grenze 0 oder der Grenze π, je nachdem $b^2 - a^2$ positiv oder negativ ist; und es ergiebt sich folgendes Resultat:

$$(5) \qquad \int_0^\infty e^{-iax} J(bx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}; & b^2 > a^2 \\[2ex] \dfrac{-i}{\sqrt{a^2 - b^2}}; & b^2 < a^2. \end{cases}$$

Trennen wir hier das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich folgende vier Formeln:

$$(6) \qquad \left.\begin{aligned} \int_0^\infty \cos ax\, J(bx)\, dx &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \\ \int_0^\infty \sin ax\, J(bx)\, dx &= 0 \end{aligned}\right| \; b^2 > a^2;$$

$$(7) \qquad \left.\begin{aligned} \int_0^\infty \cos ax\, J(bx)\, dx &= 0 \\ \int_0^\infty \sin ax\, J(bx)\, dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \end{aligned}\right| \; a^2 > b^2.$$

Die Aenderung des Vorzeichens von b hat, da $J(x)$ eine gerade Function ist, keine Aenderung zur Folge. Aendert man das Vorzeichen von a, so muss in der letzten Formel (7) das entgegengesetzte Zeichen kommen. Für $a = b$ werden beide Seiten unendlich.

§. 78.

Zweites Beispiel.

Wir betrachten das unbedingt convergente Integral

$$(1) \qquad \int_0^\infty \sin ax\, J(bx) \frac{dx}{x}$$

und ersetzen $J(bx)$ darin durch den Ausdruck §. 68 (9)

$$J(bx) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(bx \sin\omega)\, d\omega.$$

Wir erhalten durch Umkehrung der Integrationsfolge für (1) den Ausdruck

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int\limits_0^{\infty} \sin ax \cos(bx \sin\omega) \frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Nun besteht die Relation

$$2 \sin ax \cos(bx \sin\omega) = \sin(a + b \sin\omega)\, x + \sin(a - b \sin\omega) x,$$

woraus man erhält

$$2 \int\limits_0^{\infty} \sin ax \cos(bx \sin\omega) \frac{dx}{x} = \int\limits_0^{\infty} \sin(a + b \sin\omega) x \frac{dx}{x}$$
$$+ \int\limits_0^{\infty} \sin\ a - b \sin\omega) x \frac{dx}{x}.$$

Nehmen wir die Constanten a und b positiv an, so hat das erste Integral der rechten Seite, da auch $\sin\omega$ immer positiv ist, den constanten Werth $\frac{\pi}{2}$. Dasselbe gilt von dem zweiten Integral, wenn $a > b$ ist, weil dann $a - b \sin\omega$ immer positiv ist. Ist aber $a < b$, so hat das zweite Integral den Werth $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nachdem ω kleiner oder grösser als $\arcsin\frac{a}{b}$ ist (§. 13). Demnach haben wir

$$\int\limits_0^{\infty} \sin ax \cos(bx \sin\omega) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}; \quad a > b,$$
$$= \frac{\pi}{2}; \quad a < b,\ \omega < \arcsin\frac{a}{b},$$
$$= 0; \quad a < b,\ \omega > \arcsin\frac{a}{b}.$$

Demnach erhält das Integral (2) den Werth 1, wenn $a > b$ ist, und den Werth $\frac{2}{\pi} \arcsin\frac{a}{b}$, wenn $a < b$ ist, und wir er-

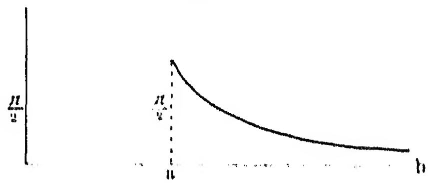
halten das Resultat

$$(3) \qquad \int_0^\infty \sin ax \, J(bx) \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}; \qquad a > b,$$

$$= \arcsin \frac{a}{b}; \qquad a < b.$$

Die Werthe von $\arcsin \frac{a}{b}$ schliessen sich für $a = b$ stetig an die Werthe $\frac{\pi}{2}$ an und werden für $b = \infty$ verschwindend klein. Betrachten wir das Integral als Function der positiven

Fig. 36.



Variablen b, so wird diese Function durch die in Fig. 36 dargestellte Curve anschaulich gemacht.

Wir wollen endlich noch das folgende Beispiel anführen:

Es ist nach §. 68 (9)

$$(4) \qquad J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \omega) \, d\omega.$$

Bedeutet also β eine beliebige positive Grösse, so ist, wie sich durch Umkehrung der Integrationsfolge ergiebt:

$$\int_0^\infty \frac{J(\alpha x) \, d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x \sin \omega) \, d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Hierin lässt sich das Integral nach α mittelst der Formel §. 19 (3) ausführen, und man erhält

$$(5) \qquad \int_0^\infty \frac{J(\alpha x) \, d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta x \sin \omega} \, d\omega.$$

Da man x in $-x$ verwandeln kann, ohne die linke Seite zu ändern, so kann man die rechte Seite auch in die Form setzen:

$$\frac{1}{\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(i\beta x \sin\omega)\, d\omega$$

und erhält dann mit Benutzung von (4):

$$(6)\qquad \int_0^\infty \frac{J(\alpha x)\, d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} J(i\beta x).$$

§. 79.

Darstellung willkürlicher Functionen durch Bessel'sche Functionen.

Wenn wir in der Formel II. (§. 70) $n = 0$ nehmen und n
§. 69 (6) $J_1(x) = -J'(x)$ setzen, so folgt

$$(1)\qquad \int_0^1 x J(\alpha x) J(\beta x)\, dx = -\frac{\alpha J(\beta) J'(\alpha) - \beta J(\alpha) J'(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

und die Formel §. 70, IV. ergiebt:

$$(2)\qquad 2\alpha \int_0^1 x J(\alpha x)^2\, dx = -J(\alpha) J'(\alpha) - \alpha J(\alpha) J''(\alpha) + \alpha J'$$

wofür man mit Benutzung der Differentialgleichung §. 69
auch setzen kann:

$$(3)\qquad \int_0^1 x J(\alpha x)^2\, dx = \frac{1}{2}\,[J(\alpha)^2 + J'(\alpha)^2].$$

Besonders einfach und wichtig werden diese Gleichun
wenn α und β zwei Wurzeln von einer der beiden Gleichur

$$(4)\qquad J(x) = 0$$

oder

$$(5)\qquad J'(x) = 0$$

sind. Wenn dann α von β verschieden ist, so ist

$$(6)\qquad \int_0^1 x J(\alpha x) J(\beta x)\, dx = 0$$

und

$$(7)\qquad \int_0^1 x J(\alpha x)^2 dx = \frac{1}{2} J'(\alpha)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2} J(\alpha)^2,$$

je nachdem α eine Wurzel von (4) oder von (5) ist. Mittelst dieser Resultate können wir eine willkürliche Function $f(x)$ von x, die in dem Intervall von 0 bis 1 gegeben ist, durch eine Reihe darstellen, die nach Bessel'schen Functionen fortschreitet, und die den Fourier'schen Reihen analog ist. Es fehlt freilich noch der Beweis, dass diese Entwickelung allgemein möglich ist; aber die Möglichkeit der Entwickelung vorausgesetzt, erhält man die Form der Entwickelung.

Lassen wir α die der Grösse nach geordneten positiven Wurzeln der Gleichung (4) durchlaufen und setzen

$$(8)\qquad f(x) = \sum^{\alpha} A_\alpha J(\alpha x),$$

so erhält man, wenn man (8) mit $J(\beta x) x dx$ multiplicirt und integrirt, worin β irgend eine bestimmte dieser Wurzeln bedeutet, nach (6) und (7)

$$(9)\qquad A_\beta J'(\beta)^2 = 2 \int_0^1 f(x) J(\beta x) x dx$$

oder, wenn β in (8) die ebenso geordneten Wurzeln von (5) sind

$$(10)\qquad A_\beta J(\beta)^2 = 2 \int_0^1 f(x) J(\beta x) x dx.$$

Setzen wir in der Formel (1) $\beta = 0$, so ergiebt sich, wenn α eine positive Wurzel der Gleichung (5) ist

$$(11)\qquad \int_0^1 x J(\alpha x) dx = 0.$$

Daraus geht hervor, dass die Formel (8) für diesen Fall nur anwendbar ist, wenn

$$\int_0^1 f(x) x dx = 0$$

ist. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so setze man

(12) $$f(x) = A_0 + \sum^{\alpha} A_\alpha J(\alpha x)$$

und erhält

(13) $$A_0 = \int_0^1 f(x)\, x\, dx,$$

während die übrigen A_α nach wie vor durch die Formel (10) bestimmt sind.

Durch einen Grenzübergang können wir aus (9) [oder auch aus (10)] eine Formel ableiten, die dem Fourier'schen Integral analog ist.

Zu diesem Zweck schreiben wir unter der Voraussetzung (9) die Formel (8) zunächst so:

$$f(x) = \sum^{\alpha} \frac{2}{J'(\alpha)^2} \int_0^1 f(\lambda) J(\alpha x) J(\alpha \lambda)\, \lambda\, d\lambda.$$

Um nun das Intervall von 0 bis 1 beliebig auszudehnen, setzen wir x/h und λ/h an Stelle von x und λ und erhalten, wenn wir $f(x/h)$ wieder mit $f(x)$ bezeichnen:

$$f(x) = \sum^{\alpha} \frac{2}{h^2 J'(\alpha)^2} \int_0^h f(\lambda)\, J\left(\frac{\alpha x}{h}\right) J\left(\frac{\alpha \lambda}{h}\right) \lambda\, d\lambda.$$

Wir nehmen jetzt an, dass $f(x) = 0$ ist, wenn x einen gegebenen Werth a überschreitet, und setzen $h > a$ voraus. Dann ist auch

(14) $$f(x) = \sum^{\alpha} \frac{2}{h^2 J'(\alpha)^2} \int_0^a f(\lambda)\, J\left(\frac{\alpha x}{h}\right) J\left(\frac{\alpha \lambda}{h}\right) \lambda\, d\lambda.$$

Es seien nun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die auf einander folgenden Wurzeln von $J(x)$. Wir setzen

(15) $$\alpha_\nu = h \xi_\nu, \quad \delta = \frac{\pi}{h}$$

und erhalten aus (14)

(16) $$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\delta}{\pi h J'(h\xi_\nu)^2} \int_0^a f(\lambda) J(\xi_\nu x) J(\xi_\nu \lambda)\, \lambda\, d\lambda.$$

Lassen wir nun h unbegrenzt wachsen, so wird δ unendlich klein; es hat daher eine beliebige endliche Anzahl von

Anfangsgliedern der Reihe (16) auf das Ergebniss keinen Einfluss, und wir begehen keinen merklichen Fehler, wenn wir $h\xi_\nu = \alpha_\nu$ unendlich gross werden lassen. Es ist aber näherungsweise für grosse x [§. 76 (16)]

(17) $J(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad J'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

und es ist also für unendlich grosse ν

$$\alpha_\nu = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2},$$

worin n eine unendlich grosse ungerade Zahl ist, die um 2 wächst, wenn ν um 1 wächst, hiernach ist $\xi_\nu - \xi_{\nu-1} = \delta$ für ein unendlich grosses ν, und folglich nach (17)

$$\pi h J'(h\xi_\nu)^2 = \frac{2}{\xi_\nu} \sin\left(\alpha_\nu - \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{2}{\xi_\nu},$$

also

$$f(x) = \sum^{\nu} \xi_\nu \delta \int_0^a f(\lambda) J(\xi_\nu x) J(\xi_\nu \lambda) \lambda d\lambda,$$

und der Grenzwerth dieser Summe ist das bestimmte Integral

(18) $$f(x) = \int_0^\infty J(\xi x) \xi d\xi \int_0^a f(\lambda) J(\xi\lambda) \lambda d\lambda.$$

Wenn die Function f es gestattet, können wir a hier ins Unendliche wachsen lassen und erhalten die dem Fourier'schen Lehrsatz ganz analoge Formel

(19) $$f(x) = \int_0^\infty J(\xi x) \xi d\xi \int_0^\infty f(\lambda) J(\xi\lambda) \lambda d\lambda.$$

Die Begründung dieser Formel, wie wir sie hier gegeben haben, ist nicht streng. Ein strenger Beweis ist von P. du Bois-Reymond gegeben[1]).

---

[1]) Mathematische Annalen, Bd. IV.

ZWEITES BUCH.

GEOMETRISCHE
UND
MECHANISCHE GRUNDSÄTZE.

Neunter Abschnitt.

Lineare infinitesimale Deformation.

§. 80.

Drehungen, Schraubungen und Richtungssysteme.

Um die Anwendungen von partiellen Differentialgleichungen auf die Physik richtig verstehen zu können, sind einige Betrachtungen geometrischer Natur über die Bewegung der den Raum stetig erfüllenden Materie vorauszuschicken.

Um eine Drehung eines Körpers um eine Axe genau zu beschreiben, denke man sich selbst in die Axe gestellt und bezeichne die nach dem Zenith weisende Richtung der Axe als die positive. Die Drehung heisst eine Rechtsdrehung oder eine positive Drehung, wenn sie dann vor den Augen her von rechts nach links erfolgt, im entgegengesetzten Falle eine Linksdrehung oder negative Drehung. Dieser Unterschied lässt sich in keiner Weise begrifflich definiren, sondern nur an Objecten der Aussenwelt, zunächst am menschlichen Körper, demonstriren. Die Drehung des Uhrzeigers ist für den auf dem Zifferblatte Stehenden eine Linksdrehung. Vertauscht man die positive Axenrichtung mit der negativen, so ändert sich auch der Sinn der Drehung.

Wenn sich ein Körper längs einer Axe verschiebt und gleichzeitig dreht, so vollführt er eine Schraubenbewegung oder Schraubung. Unter den Schraubungen giebt es gleichfalls zwei wesentlich verschiedene Arten, die als Rechtsschraubung und Linksschraubung unterschieden werden. Eine Rechtsschraubung ist die, deren Drehung eine positive ist, wenn die

positive Axenrichtung in der Richtung des Fortschrittes genommen ist. Man kann diese Regel der Anschauung und dem Gedächtnisse so einprägen:

Eine Rechtsschraubung vollführt der rechte Arm, wenn er sich ohne Zwang bewegt, also z. B. so, dass der rechte Arm vorgestossen wird, und gleichzeitig der Rücken der Hand von oben nach aussen gedreht wird.

Rechtsgewunden sind die meisten im täglichen Leben benutzten Schrauben, die Korkzieher, die meisten Schneckenhäuser (doch giebt es auch links gewundene).

Wie wir schon früher (§. 37) festgesetzt haben, bilden drei von einem Punkte auslaufende, nicht in einer Ebene gelegene Richtungen, in einer bestimmten Reihenfolge 1, 2, 3 genommen, ein Rechtssystem (directes oder positives System), wenn jede von ihnen in die folgende übergeht durch eine positive Drehung von weniger als 180° um die dritte. Hierbei ist 1 wieder auf 3 folgend anzunehmen. Es giebt nur noch einen zweiten Fall, nämlich den, dass jede in die folgende durch eine negative Drehung übergeht. Ein solches System heisst dann ein Linkssystem (indirectes oder negatives System). Man erhält ein Rechtssystem, wenn man die drei ersten Finger 1, 2, 3 (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger) der rechten Hand ohne Zwang ausstreckt, während man die beiden letzten Finger einschlägt.

Wenn wir die Punkte des Raumes zur analytischen Darstellung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen, so werden wir, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich hervorgehoben ist, immer annehmen, dass die Coordinatenaxen in der Reihenfolge x, y, z ein Rechtssystem bilden.

§. 81.

Lineare Deformation.

Wir denken uns nun eine einen Raumtheil stetig erfüllende Substanz, deren Theile beweglich sind, aus einer Lage in eine andere gebracht. Ein Punkt m dieser Substanz, der vor der Verschiebung die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z hat, möge durch die Verschiebung in die durch die Coordinaten X, Y, Z bestimmte Lage übergegangen sein. Wenn dann zwischen den

ursprünglichen und den veränderten Coordinaten von m eine Beziehung der folgenden Form besteht:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
X &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\
Y &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\\
Z &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,
\end{aligned}
$$

worin die Coëfficienten von x, y, z unabhängig sind, so wollen wir die hierdurch ausgedrückte Veränderung des Systems eine **lineare Deformation** nennen. Sie ist dadurch ausgezeichnet, dass Punkte, die ursprünglich auf einer Geraden, auf einer Ebene, auf einer Fläche zweiten Grades etc. liegen, auch nach eingetretener Deformation auf einem Gebilde derselben Art liegen.

Setzen wir noch

$$x' = X - \alpha, \quad y' = Y - \beta, \quad z' = Z - \gamma,$$

so ergeben die Gleichungen (1)

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\
y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\\
z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,
\end{aligned}
$$

und x' y' z' sind die relativen Coordinaten des Punktes m nach eingetretener Verschiebung, bezogen auf den Punkt, der im ursprünglichen Zustande im Coordinatenanfangspunkte lag. Wir betrachten jetzt aber nur unendlich kleine oder, wie wir auch sagen, **infinitesimale Deformationen**, d. h. wir sehen

$$x' - x, \quad y' - y, \quad z' - z$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 - 1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\\
&\beta_1,\ \beta_2 - 1,\ \beta_3,\\
&\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3 - 1
\end{aligned}
$$

als **unendlich kleine Grössen erster Ordnung** an und **vernachlässigen unendlich kleine Grössen höherer Ordnung gegen die von niedrigerer Ordnung.**

Denken wir uns zwei solche Deformationen nach einander ausgeführt, so werden nach der zweiten die Coordinaten des Punktes m in der dritten Lage durch Ausdrücke von der Form dargestellt:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
x'' &= \alpha'_1 x' + \alpha'_2 y' + \alpha'_3 z',\\
y'' &= \beta'_1 x' + \beta'_2 y' + \beta'_3 z',\\
z'' &= \gamma'_1 x' + \gamma'_2 y' + \gamma'_3 z',
\end{aligned}
$$

und das Ergebniss kann auch durch die einzige Deformation erreicht werden, die den Ausdruck hat

$$x'' = \alpha_1'' x + \alpha_2'' y + \alpha_3'' z,$$
$$y'' = \beta_1'' x + \beta_2'' y + \beta_3'' z,$$
$$z'' = \gamma_1'' x + \gamma_2'' y + \gamma_3'' z,$$

wenn

$$\alpha_1'' = \alpha_1' \alpha_1 + \alpha_2' \beta_1 + \alpha_3' \gamma_1,$$
$$\alpha_2'' = \alpha_1' \alpha_2 + \alpha_2' \beta_2 + \alpha_3' \gamma_2 \text{ etc.}$$

gesetzt ist. Vernachlässigt man aber unendlich kleine Grössen höherer Ordnung, so wird

$$(4) \qquad \begin{aligned} \alpha_1'' &= \alpha_1 + \alpha_1' - 1, \\ \alpha_2'' &= \alpha_2 + \alpha_2', \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

und man sieht, dass man zu demselben Ergebnisse kommt, wenn man die beiden Deformationen in umgekehrter Ordnung ausführt. Man kann dies anwenden, um eine gegebene Deformation ni mehrere einfachere zu zerlegen.

§. 82.

Drehung.

Unter den linearen Deformationen ist als Specialfall die Bewegung eines starren Körpers enthalten. Denken wir uns nämlich ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit einem starren Körper in fester Verbindung, so dass es die Bewegungen des Körpers mitmachen muss, so hat der Punkt m in Bezug auf dieses Coordinatensystem immer dieselben Coordinaten x, y, z. Um also die Coordinaten x', y', z' von m nach eingetretener Verschiebung in dem ursprünglichen Coordinatensysteme zu finden, hat man die aus der analytischen Geometrie wohl bekannten Formeln für die rechtwinklige Coordinatentransformation anzuwenden, und es werden also x', y', z' durch die Formeln §. 81 (2) dargestellt, zwischen deren Coëfficienten die Relationen bestehen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, & \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, & \alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gehen aber mit den erlaubten Vernachlässigungen in folgende über:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, & \beta_3 + \gamma_2 &= 0, \\ \beta_2 &= 1, & \gamma_1 + \alpha_3 &= 0, \\ \gamma_3 &= 1, & \alpha_2 + \beta_1 &= 0, \end{aligned}$$

und wenn wir also

$$\begin{aligned} -\beta_3 = \gamma_2 &= p, \\ \gamma_1 = -\alpha_3 &= q, \\ -\alpha_2 = \beta_1 &= r \end{aligned}$$

setzen, so werden die Gleichungen, die eine unendlich kleine Lagenänderung eines starren Körpers ausdrücken, nach §. 81 (2):

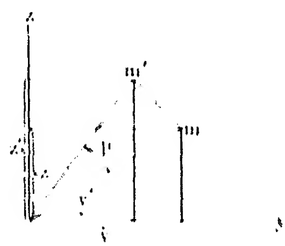
$$(2) \qquad \begin{aligned} x' &= x - ry + qz, \\ y' &= y - pz + rx, \\ z' &= z - qx + py. \end{aligned}$$

Man kann diese Lagenänderung nun wieder in drei partielle zerlegen, von denen die eine, die aus (2) erhalten wird, wenn man q und $r = 0$ setzt, so dargestellt ist:

$$x' = x, \quad y' = y - pz, \quad z' = z + py.$$

Die Bedeutung dieser partiellen Verschiebung ist aus der beistehenden Fig. 37 zu ersehen. Sie besteht (bei positivem p) in einer positiven Drehung mit dem unendlich kleinen Winkel p um die x-Axe. Ganz entsprechende Bedeutung haben die beiden anderen Componenten der Verschiebung, die in Drehungen mit den Winkeln q und r um die Axen y und z bestehen.

Fig. 37.



Bei der durch (2) ausgedrückten Deformation werden alle Punkte der durch die Gleichungen

$$(3) \qquad x : y : z = p : q : r$$

dargestellten geraden Linie in ihrer ursprünglichen Lage bleiben. Die Bewegung besteht also in einer Drehung um diese gerade Linie als Axe. Wir setzen

$$(4) \qquad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

mit positivem Vorzeichen der Quadratwurzel und bestimmen die

positive Richtung der Axe so, dass sie mit den Coordinatenaxen die durch die Gleichungen

$$(5)\qquad p = \omega\cos\alpha,\quad q = \omega\cos\beta,\quad r = \omega\cos\gamma$$

bestimmten Winkel α, β, γ einschliesst.

Die Verschiebung, die irgend ein Punkt x, y, z erlitten hat, ergiebt sich nach (2)

$$D = \sqrt{(ry - qz)^2 + (pz - rx)^2 + (qx - py)^2}$$
$$= \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (px + qy + rz)^2}.$$

Setzen wir

$$(6)\qquad x = \varrho\cos a,\quad y = \varrho\cos b,\quad z = \varrho\cos c,$$
$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

so ist nach (5) und (6)

$$px + qy + rz = \omega\varrho(\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma)$$
$$= \omega\varrho\cos\Theta,$$

worin Θ den Winkel zwischen dem Radius Vector ϱ und der Drehungsaxe bedeutet, und es ergiebt sich

$$(7)\qquad D = \omega\varrho\sin\Theta = \omega d,$$

wenn d den senkrechten Abstand des Punktes x, y, z von der Drehungsaxe bedeutet. Demnach ist ω der unendlich kleine Winkel, um den sich das System gedreht hat, und die Drehung um die Axe hat den positiven Sinn, wie man erkennt, wenn man die Drehungsaxe mit der x-Axe zusammenfallen lässt.

§. 83.

Dehnung.

Wir wollen unter einer Dehnung eine solche Deformation verstehen, bei der drei auf einander rechtwinklige Richtungen ungeändert geblieben sind. Um eine solche Deformation analytisch darzustellen, nehmen wir zunächst ein specielles Coordinatensystem ξ, η, ζ, dessen drei Axen mit den als unveränderlich vorausgesetzten Richtungen zusammenfallen. Dann geben die Gleichungen §. 81, (2)

$$(1)\qquad \xi' = \lambda\xi,\quad \eta' = \mu\eta,\quad \zeta' = \nu\zeta$$

worin $\lambda - 1$, $\mu - 1$, $\nu - 1$ die Zunahmen der Längeneinheit in den drei Axenrichtungen und also unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind. Nun kehren wir zu dem ursprünglichen Coordinatensysteme x, y, z zurück und drücken den Zusammenhang zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ und x, y, z durch die Formeln aus:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
x &= a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, & \xi &= a_1x + b_1y + c_1z,\\
y &= b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, & \eta &= a_2x + b_2y + c_2z,\\
z &= c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta, & \zeta &= a_3x + b_3y + c_3z,
\end{aligned}
$$

und derselbe Zusammenhang besteht zwischen den Coordinaten x', y', z' und ξ', η', ζ'. Hierin genügen die Coëfficienten a, b, c den Bedingungen für die orthogonale Coordinatentransformation [§. 82, (1)].

Aus (1) und (2) folgt aber

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1\lambda\xi + a_2\mu\eta + a_3\nu\zeta,\\
y' &= b_1\lambda\xi + b_2\mu\eta + b_3\nu\zeta,\\
z' &= c_1\lambda\xi + c_2\mu\eta + c_3\nu\zeta,
\end{aligned}
$$

und daraus mit Benutzung des zweiten Systemes (2)

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \alpha x + \gamma' y + \beta' z,\\
y' &= \gamma' x + \beta y + \alpha' z,\\
z' &= \beta' x + \alpha' y + \gamma z,
\end{aligned}
$$

worin

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\alpha &= a_1^2\lambda + a_2^2\mu + a_3^2\nu, & \alpha' &= b_1c_1\lambda + b_2c_2\mu + b_3c_3\nu,\\
\beta &= b_1^2\lambda + b_2^2\mu + b_3^2\nu, & \beta' &= c_1a_1\lambda + c_2a_2\mu + c_3a_3\nu,\\
\gamma &= c_1^2\lambda + c_2^2\mu + c_3^2\nu, & \gamma' &= a_1b_1\lambda + a_2b_2\mu + a_3b_3\nu.
\end{aligned}
$$

Hierin sind, obwohl die $a_1, b_1, \ldots$ endliche Grössen sind,

$$\alpha - 1,\ \beta - 1,\ \gamma - 1,\quad \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

unendlich kleine Grössen erster Ordnung, die für $\lambda = \mu = \nu = 1$ in Null übergehen.

Der wesentliche Unterschied der Formeln (3) gegenüber den allgemeinen Formeln §. 81, (2) besteht darin, dass hier die an symmetrischen Stellen stehenden Coëfficienten α', β', γ' paarweise gleich sind, d. h. der Coëfficient von y in x' gleich dem von x in y' u. s. f.

Es ist aber noch nachzuweisen, dass diese Form der Gleichungen (3) genügt, um eine reine Dehnung auszudrücken. Um

diesen Nachweis ohne zu grosse Rechnung zu führen, benutzen wir eine Function zweiten Grades:

$$(5)\qquad f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\alpha' yz + 2\beta' zx + 2\gamma' xy,$$

durch die die Formeln (3) so dargestellt werden können:

$$(6)\qquad x' = \frac{1}{2} f'(x),\quad y' = \frac{1}{2} f'(y),\quad z' = \frac{1}{2} f'(z),$$

wenn $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ die Derivirten von $f(x, y, z)$ bedeuten.

Wird nun durch ein Formelsystem (2) irgend ein neues Coordinatensystem ξ, η, ζ eingeführt, so geht $f(x, y, z)$ in eine ganz ähnliche Function über:

$$(7)\qquad f(x, y, z) = \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

und man erhält durch Differentiation dieser identischen Gleichung nach ξ, η, ζ:

$$(8)\qquad \xi' = \frac{1}{2}\varphi'(\xi),\quad \eta' = \frac{1}{2}\varphi'(\eta),\quad \zeta' = \frac{1}{2}\varphi'(\zeta),$$

d. h. die charakteristische Form der Ausdrücke (3) geht durch beliebige rechtwinklige Coordinatentransformation nicht verloren. Nun kann man, wie aus der Theorie der Flächen zweiten Grades bekannt ist, das Coordinatensystem ausnahmslos so bestimmen, dass $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ die Form erhält:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda\xi^2 + \mu\eta^2 + \nu\zeta^2.$$

(Man hat nur die Hauptaxen der Fläche zweiten Grades $f = 1$ als Axen der ξ, η, ζ zu wählen), und dadurch gehen die Formeln (8) geradezu in die Formeln (1) über, die der Ausdruck für eine Dehnung sind.

Die Massenpunkte, die im ursprünglichen Zustande in einer Kugel mit dem Radius l liegen, also der Bedingung

$$(9)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqq l^2$$

genügen, erfüllen nach eingetretener Deformation ein Ellipsoid

$$(10)\qquad \frac{\xi'^2}{\lambda^2} + \frac{\eta'^2}{\mu^2} + \frac{\zeta'^2}{\nu^2} \lesseqgtr l^2.$$

Die Volumina K und E dieser beiden Körper sind

$$K = \frac{4\pi}{3} l^3,\quad E = \frac{4\pi}{3}\lambda\mu\nu l^3,$$

und folglich ist

oder mit den erlaubten Vernachlässigungen

$$(11)\qquad \varDelta = (\lambda - 1) + (\mu - 1) + (\nu - 1) = \lambda + \mu + \nu - 3.$$

Diese Grösse, die das Verhältniss der Volumenzunahme zum ursprünglichen Volumen ausdrückt, wird die räumliche Dilatation genannt. Nach den ersten drei Gleichungen (4) erhalten wir dafür auch den Ausdruck

$$(12)\qquad \varDelta = \alpha + \beta + \gamma - 3,$$

der für jedes beliebige Coordinatensystem gilt.

§. 84.

Die allgemeine infinitesimale lineare Deformation.

Die allgemeine infinitesimale lineare Deformation, die wir, wie in §. 81, durch die Formeln ausdrücken:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned}$$

lässt sich nun immer darstellen als das Ergebniss der Zusammensetzung einer Drehung mit einer Dehnung. Sind diese beiden letzten in der Form angenommen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= x - ry + qz, \\ y' &= y - pz + rx, \\ z' &= z - qx + py; \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= \alpha x + \gamma' y + \beta' z, \\ y' &= \gamma' x + \beta y + \alpha' z, \\ z' &= \beta' x + \alpha' y + \gamma z, \end{aligned}$$

so ergiebt sich aus ihnen nach der durch §. 81, (4) ausgedrückten Regel der Zusammensetzung die Deformation (1), wenn wir setzen:

$$(4)\qquad \begin{array}{lll} \alpha_1 = \alpha, & \beta_3 = \alpha' - p, & \gamma_2 = \alpha' + p, \\ \beta_2 = \beta, & \gamma_1 = \beta' - q, & \alpha_3 = \beta' + q, \\ \gamma_3 = \gamma, & \alpha_2 = \gamma' - r, & \beta_1 = \gamma' + r, \end{array}$$

und daraus

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}(\gamma_2 - \beta_3), & q &= \frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1), & r &= \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2),\\
\alpha' &= \frac{1}{2}(\gamma_2 + \beta_3), & \beta' &= \frac{1}{2}(\alpha_3 + \gamma_1), & \gamma' &= \frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_2),
\end{aligned}
$$

und da bei der Rotation (2) eine Volumänderung nicht eintritt, so ist auch hier die räumliche Dilatation

$$
(6)\qquad \Delta = \alpha + \beta + \gamma - 3 = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - 3,
$$

d. h. gleich der Summe der um 1 verminderten Diagonalcoëfficienten [1]).

[1]) Vergl. Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik, §. 3. Dirichlet's Werke, Bd. 2, S. 277.

Zehnter Abschnitt.

Vectoren.

§. 85.

Felder, Skalare und Vectoren.

Die Physik hat es nicht nur mit dem absoluten Raume der Geometrie zu thun, sondern mit dem mit Materie erfüllten Raume, oder, allgemeiner zu reden, mit einem Raume, dem in jedem Punkte gewisse Eigenschaften zukommen. Ein begrenzter oder unbegrenzter Raum, der in jedem seiner Punkte der Träger einer wohl definirten Eigenschaft ist, heisst ein Feld. So spricht man von einem Temperaturfelde, einem Geschwindigkeitsfelde, einem Kraftfelde u. s. f., und es hat dabei auch keine Schwierigkeit, anzunehmen, dass sich mehrere Felder verschiedener oder auch derselben Qualität überdecken, d. h. gleichzeitig denselben geometrischen Raum einnehmen.

Die Qualitäten, die zur Definition eines Feldes dienen, können von zweierlei Art sein. Im einfachsten Falle ist es eine blosse Ortsfunction, die sich von Punkt zu Punkt, stetig oder unstetig, ändert, auch in einem Raumstücke constant sein kann, wie etwa die Temperatur, die Dichtigkeit, die Concentration einer Lösung, und vieles Andere. Solche Ortsfunctionen werden Skalare oder skalare Grössen und die entsprechenden Felder skalare Felder genannt.

Die Eigenschaft des Feldes kann aber auch eine Ortsfunction sein, mit der in jedem Punkte eine bestimmte Richtung verbunden ist. Solche Eigenschaften heissen Vectoren oder Vectorgrössen. Dahin gehören als erste Beispiele Geschwindig-

keiten und Kräfte. In jeder Vectorgrösse ist eine skalare Grösse enthalten, nämlich eben die Ortsfunction, die man erhält, wenn man von der Richtung absieht.

Dieser Skalar wird die absolute Grösse oder der Tensor des Vectors genannt, oder auch, wenn von der Gesammtheit der Punkte eines Feldes die Rede ist, die Feldstärke.

Die zu dem Vector gehörige Richtung nennen wir auch die Vectoraxe.

Zur Veranschaulichung denke man sich den in einem Punkte vorhandenen Vector durch eine Strecke dargestellt, die in der Richtung des Vectors aufgetragen ist und eine dem Tensor gleiche (oder proportionale) Länge hat. Es geht dann durch jeden Punkt eines Vectorfeldes eine gerichtete und begrenzte Strecke, die ein Bild der Vectorgrösse ist, aber auch selbständig als Vectorgrösse betrachtet werden kann. Wir bezeichnen diese so definirten Strecken in der Folge gleichfalls als Vectoren.

Ein unter allen Umständen getreues Bild eines Vectorfeldes, das zugleich eine der wichtigsten Anwendungen dieses Begriffes bietet, erhält man, wenn man sich, wie im vorigen Abschnitte, einen Raum mit einer Materie erfüllt denkt, deren Theile beweglich sind, etwa wie bei einer Flüssigkeit, einer zähen Masse oder einem elastischen Körper. Ist diese Materie in Bewegung, so kommt in einem bestimmten Augenblicke jedem ihrer Punkte eine nach Richtung und Grösse bestimmte Geschwindigkeit zu. Oft ist es aber zweckmässiger, nicht sowohl die Geschwindigkeit selbst, als den von einem Punkte der angenommenen Materie in einem unendlich kleinen Zeitelemente dt durchlaufenen, als geradlinig zu betrachtenden, unendlich kleinen Weg als Bild des Vectors zu betrachten. Wir wollen diesen Vector kurz die Verrückung nennen. Seine absolute Grösse ist zwar unendlich klein, steht aber zu der willkürlich angenommenen unendlich kleinen Zeit dt in einem endlichen Verhältnisse.

Zur Bezeichnung von Vectoren bedienen wir uns vorzugsweise der Buchstaben des grossen deutschen Alphabets.

Ein Vector $\mathfrak{A}$ hat in jedem Punkte eine bestimmte Richtung λ und bildet also mit irgend einer anderen Richtung l einen bestimmten Winkel, der zwischen 0^0 und 180^0 gelegen ist. Die rechtwinklige Projection von $\mathfrak{A}$ auf l heisst die Componente des Vectors nach der Richtung l. Ist A der

Tensor von $\mathfrak{A}$ und (l, λ) der Winkel der beiden Richtungen l, λ, so ist

$$(1) \qquad A_l = A \cos(l, \lambda)$$

das Maass für diese Projection, das also positiv oder negativ ist, je nachdem der Winkel (l, λ) spitz oder stumpf ist.

Die Punkte eines Feldes werden analytisch durch ihre auf ein rechtwinkliges Axensystem bezogenen Coordinaten x, y, z bestimmt.

Ein Vector $\mathfrak{A}$ ist vollständig bestimmt, wenn seine Componenten nach den drei Coordinatenaxen gegeben sind. Sind diese Componenten A_x, A_y, A_z, so ist

$$(2) \qquad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

der Tensor, und

$$(3) \qquad \cos(\lambda, x) = \frac{A_x}{A}, \quad \cos(\lambda, y) = \frac{A_y}{A}, \quad \cos(\lambda, z) = \frac{A_z}{A}$$

sind die Richtungscosinusse des Vectors, und nach (1) ist

$$(4) \qquad A_l = A_x \cos(l, x) + A_y \cos(l, y) + A_z \cos(l, z).$$

Bei einer Parallelverschiebung des Coordinatensystems bleiben die Vectorcomponenten ungeändert. Dreht man aber das Coordinatensystem mit Festhaltung des Anfangspunktes, so hängen die neuen Vectorcomponenten mit den alten durch dieselben Formeln zusammen, wie die neuen Coordinaten eines beliebigen Punktes mit den alten.

Die Resultante zweier von einem Punkte auslaufenden Vectoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ist nach Grösse und Richtung die Diagonale $\mathfrak{C}$ des aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu construirenden Parallelogramms, und ebenso kann man die Resultante von drei und mehr Vectoren bilden. Jeder Vector ist die Resultante seiner drei Componenten.

Sind A_x, A_y, A_z und B_x, B_y, B_z die Componenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so sind nach dieser Definition

$$(5) \qquad A_x + B_x, \quad A_y + B_y, \quad A_z + B_z$$

die Componenten der Resultante von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Man nennt diese Resultante $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch die Summe der beiden Vectoren und setzt in symbolischer Bezeichnung

$$(6) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Die Bedeutung einer Summe aus mehr als zwei Vectoren ist

hiernach von selbst klar, und man sieht, dass diese Summe von der Reihenfolge der Summanden unabhängig ist.

Wenn die Axe eines Vectors $\mathfrak{A}$ ungeändert bleibt, sein Tensor A aber in ϱA verwandelt wird, worin ϱ irgend eine positive Function des Ortes sein kann, so entsteht ein neuer Vector, der mit $\varrho \mathfrak{A}$ bezeichnet wird. Unter $-\mathfrak{A}$ verstehen wir einen Vector, der denselben Tensor, aber entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{A}$ hat.

Ein Vector, dessen absolute Grösse gleich Null ist, hat keine bestimmte Richtung. Ein solcher Vector ist die Resultante zweier gleicher und entgegengesetzter Vectoren, $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$, und wird mit 0 bezeichnet.

§. 86.

Darstellung eines Vectors durch eine lineare infinitesimale Deformation.

Wir veranschaulichen nun die in der Vectortheorie auftretenden Grössen durch die schon im vorigen Paragraphen erwähnten Verrückungen einer Materie. Wir setzen dabei aber jetzt die Vectorcomponenten als stetige und differentiirbare Functionen der Coordinaten x, y, z eines Feldpunktes voraus.

Wir verstehen unter der Umgebung eines Feldpunktes m den Inbegriff aller Punkte m', deren Entfernung von m eine unendlich kleine Grösse ε nicht übersteigt, wobei jedoch ε als völlig unabhängig von der unendlich kleinen Zeitgrösse dt zu betrachten ist. Wir setzen von beiden Grössen voraus, dass die höheren Potenzen gegen die niedrigeren vernachlässigt werden dürfen, nehmen aber keinerlei bestimmtes Verhältniss zwischen ε und dt an.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Geschwindigkeitsvector, so gehen durch die Verrückung im Zeitelemente dt alle Punkte der Umgebung von m in eine neue Lage über, und es ergiebt sich leicht, dass diese Veränderung eine lineare infinitesimale Deformation ist, wie wir sie im neunten Abschnitte betrachtet haben.

Sind nämlich x, y, z die Coordinaten des Punktes m und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die des Punktes m' vor der Verrückung, so sind dx, dy, dz die relativen Coordinaten von m' in Bezug auf m. Setzen wir dann zur Abkürzung, wenn φ eine stetige Function der Coordinaten ist

$$(1) \qquad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

und bezeichnen wie früher mit A_x, A_y, A_z die Componenten von $\mathfrak{A}$, so sind nach der Verrückung die Coordinaten

von m:	von m':
$x + A_x dt,$	$x + dx + (A_x + dA_x) dt,$
$y + A_y dt,$	$y + dy + (A_y + dA_y) dt,$
$z + A_z dt,$	$z + dz + (A_z + dA_z) dt.$

Wenn also nach eingetretener Verrückung die relativen Coordinaten von m' in Bezug auf m mit $d'x$, $d'y$, $d'z$ bezeichnet werden, so ergiebt sich

$$(2) \qquad \begin{aligned} d'x &= dx + dA_x dt, \\ d'y &= dy + dA_y dt, \\ d'z &= dz + dA_z dt, \end{aligned}$$

und diese Formeln stellen also eine lineare infinitesimale Deformation [wie in §. 84, (1)] dar, wenn

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 + \frac{\partial A_x}{\partial x} dt, & \alpha_2 = \frac{\partial A_x}{\partial y} dt, & \alpha_3 = \frac{\partial A_x}{\partial z} dt, \\ \beta_1 = \frac{\partial A_y}{\partial x} dt, & \beta_2 = 1 + \frac{\partial A_y}{\partial y} dt, & \beta_3 = \frac{\partial A_y}{\partial z} dt, \\ \gamma_1 = \frac{\partial A_z}{\partial x} dt, & \gamma_2 = \frac{\partial A_z}{\partial y} dt, & \gamma_3 = 1 + \frac{\partial A_z}{\partial z} dt. \end{array}$$

gesetzt wird. Diese Deformation lässt sich nun wie oben in zwei partielle Deformationen zerlegen, die wir jetzt einzeln zu betrachten haben. Zunächst aber ist noch zu bemerken, dass die Natur dieser Deformation, von dem willkürlichen constanten Factor dt abgesehen, durch den ursprünglich gegebenen Vector vollständig bestimmt ist und in keiner Weise von der Lage des Coordinatensystems abhängen kann.

§. 87.

Curl und Divergenz eines Vectors.

Fassen wir, wie im vorigen Paragraphen gezeigt ist, einen Vector $\mathfrak{A}$ als Geschwindigkeit auf, so können wir aus ihm in völlig eindeutiger Weise, und ohne Benutzung des Coordinatensystems, einen zweiten Vector $\mathfrak{C}$ ableiten, wenn wir in jedem

Punkte die Drehungsaxe der linearen Deformation als Vectoraxe nehmen und als Tensor eine Grösse, die dem Drehungswinkel gleich oder proportional ist. Wir wollen ihn gleich dem Doppelten der Drehungsgeschwindigkeit setzen und den so definirten Vector $\mathfrak{C}$ mit Benutzung des englischen Ausdruckes den **Curl** des Vectors $\mathfrak{A}$ nennen:

$$\mathfrak{C} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Der Curl ist hiernach unabhängig vom Coordinatensysteme erklärt. Wenn aber A_x, A_y, A_z die Componenten von $\mathfrak{A}$ sind, so erhält man für die Componenten von $\mathfrak{C}$ nach §. 84 (5)

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ C_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ C_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ausser der Drehung ist in der den Vector $\mathfrak{A}$ darstellenden linearen Deformation noch ein zweiter Bestandtheil enthalten, nämlich eine Dehnung, die nach den Formeln (3) des vorigen Paragraphen und nach §. 84 leicht bestimmt werden kann. Die räumliche Dilatation dieser Deformation ist eine durch $\mathfrak{A}$ völlig bestimmte, vom Coordinatensysteme unabhängige **skalare** Grösse, die wir die **Divergenz** des **Vectors** $\mathfrak{A}$ nennen. Sie hat den folgenden Ausdruck

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{3}$$

Die Divergenz des Curles von $\mathfrak{A}$ ist, wie die Formeln (2) zeigen, immer gleich Null.

§. 88.

Der Gradient eines Skalars.

Wir betrachten jetzt ein skalares Feld, und es sei S die das Feld bestimmende Ortsfunction, die wir als stetig und differentiirbar voraussetzen. Wir ziehen von einem Punkte m des Feldes aus eine gerade Linie L in einer beliebigen Richtung und bezeichnen mit s den Abstand eines Punktes m' auf dieser Linie

von m. Unter dem *Gefälle von S in der Richtung L* verstehen wir dann den Grenzwerth des Verhältnisses $(S - S')/s$, wenn sich m' dem Punkte m unendlich annähert. Dieser Grenzwerth ist gleich dem Differentialquotienten $-dS/ds$, wenn wir S als Function der Variablen s auffassen.

Unter dem *Gefälle der Function S* schlechtweg, ohne Angabe einer Richtung, verstehen wir den grössten unter allen Werthen, die das Gefälle in den von m auslaufenden Richtungen hat; und da dieses grösste Gefälle in einer bestimmten Richtung stattfinden wird, so können wir diese Richtung zur Axe eines Vectors $\mathfrak{G}$ machen, dem wir das grösste Gefälle selbst als Tensor geben.

Diesen Vector $\mathfrak{G}$ nennen wir den *Gradienten* von S und bezeichnen ihn mit

(1) $$\mathfrak{G} = \operatorname{grad} S.$$

Diese Definition des Gradienten ist wiederum von dem Coordinatensysteme völlig unabhängig. Zu seiner Darstellung wenden wir aber ein Coordinatensystem an. Es seien α, β, γ die Winkel, die die Richtung L mit den Coordinatenaxen bildet. Dann ist

(2) $$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{\partial S}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial S}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial S}{\partial z}\cos\gamma.$$

Wir nehmen an, dass die Differentialquotienten $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ nicht alle drei verschwinden, und setzen

(3) $$-\frac{\partial S}{\partial x} = G\cos a, \qquad -\frac{\partial S}{\partial y} = G\cos b, \qquad -\frac{\partial S}{\partial z} = G\cos c,$$

(4) $$G = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}.$$

Dann sind a, b, c die Winkel, die eine gewisse Richtung L_0 mit den Axen x, y, z einschliesst, und wenn wir mit Θ den Winkel zwischen den beiden Richtungen L und L_0 bezeichnen, so ist nach (2)

(5) $$-\frac{\partial S}{\partial s} = G\cos\Theta.$$

Man sieht hieraus, dass die Richtungen, in denen das Gefälle einen constanten Werth hat, einen Kreiskegel mit der Axe L_0 erfüllen, und das Maximalgefälle G fällt in die Richtung L_0. Demnach sind

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
G_x &= -\frac{\partial S}{\partial x}, \\
G_y &= -\frac{\partial S}{\partial y}, \\
G_z &= -\frac{\partial S}{\partial z}
\end{aligned}
$$

die Componenten des Vectors $\mathfrak{G}$ und die Grösse G ist der Tensor dieses Vectors.

Das Quadrat von G, also die Grösse

$$
(7) \qquad G^2(S) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2,
$$

ist vom Coordinatensysteme unabhängig. Die Grösse G selbst heisst nach Lamé der erste Differentialparameter von S[1]).

Die Gleichungen (6) zeigen nach §. 87 (2), dass der Curl des Vectors $\mathfrak{G}$ verschwindet.

Es ist ferner

$$
(8) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{G} = -\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial z^2},
$$

und wenn wir also das Zeichen gebrauchen

$$
(9) \qquad \Delta S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2},
$$

so folgt

$$
(10) \qquad \operatorname{div} \operatorname{grad} S = -\Delta S.
$$

Die Grösse ΔS, die auch der zweite Differentialparameter von S heisst, spielt in der mathematischen Physik eine wichtige Rolle. Sie ist, wie aus der Definition hervorgeht, von dem Coordinatensysteme gänzlich unabhängig, was sich auch durch Rechnung leicht bestätigen lässt.

Die Punkte, in denen ein Skalar S einen constanten Werth hat, erfüllen, wenn wir von einzelnen Punkten des Maximums oder Minimums, in denen die drei Differentialquotienten (6) alle drei verschwinden, absehen, gewisse Flächen, die man Niveauflächen nennt. Aendert man den constanten Werth von S, so erhält man eine Schaar von Niveauflächen, deren orthogonale

---

[1]) Lamé, Leçons sur l'élasticité und Leçons sur les coordonnées curvilignes.

Trajectorien die Curven stärksten Gefälles sind. Die Tangenten dieser Curven stärksten Gefälles geben überall die Richtung des Vectors $\mathfrak{G}$ an.

Denn nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie sind die durch (6) bestimmten Grössen G_x, G_y, G_z proportional mit den Richtungscosinussen der Normale an die Fläche $S = \text{const.}$

§. 89.

Der Gauss'sche und der Stokes'sche Integralsatz.

Wir haben im fünften Abschnitte zwei Sätze über räumliche Integrale und Flächenintegrale abgeleitet, die ihren einfachsten Ausdruck erst in der Sprache der Vectorgeometrie finden. Hierher gehört zunächst der Gauss'sche Integralsatz:

Wenn $d\tau$ ein Element des begrenzten Raumes τ ist und do ein Element seiner Oberfläche, wenn ferner n die nach innen gerichtete Normale dieser Oberfläche ist, und X, Y, Z drei im ganzen Raume stetige Functionen des Ortes sind, so ist nach §. 39 (7)

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau$$
$$= -\int[X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)+Z\cos(n,z)]\,do.$$

Wenn nun hierin für X, Y, Z die Componenten eines Vectors $\mathfrak{A}$ gesetzt werden, dessen nach der Richtung n genommene Componente A_n ist, so nimmt dieser Satz nach §. 85, (4) und §. 87, (3) die einfache Gestalt an:

$$\text{I.} \qquad \int \operatorname{div}\mathfrak{A}\,d\tau = -\int A_n\,do.$$

In dieser Form erscheint der Gauss'sche Satz in einer gänzlich vom Coordinatensysteme unabhängigen Form.

Aehnlich verhält es sich mit dem Satze von Stokes §. 40, (10)

$$\int\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\cos(\nu,x)+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\cos(\nu,y)+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\cos(\nu,z)\right]do$$
$$= \int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Dieser Satz bezieht sich auf ein begrenztes Stück einer krummen Oberfläche, deren Element do ist; dx, dy, dz sind die

Projectionen eines Elementes ds der Begrenzungscurve des Flächenstückes. Ueber die dabei in Betracht kommenden Richtungen gilt die Bestimmung, dass das Element ds, die von ds in das Innere der Fläche gelegte Normale dn und die auf beiden senkrechte Richtung $d\nu$ in der Reihenfolge $(ds, dn, d\nu)$ ein Rechtssystem bilden. Wenn nun wieder X, Y, Z die Componenten eines Vectors $\mathfrak{A}$ sind, so steht unter dem Randintegrale das Element $A_s ds$, und die Grössen $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \dots$ sind die Componenten C_x, C_y, C_z des Curls $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$; also ist der Factor von do die Componente C_ν dieses Curls und wir haben den Stokes'schen Satz in der folgenden, vom Coordinatensysteme unabhängigen Form:

$$\text{II.} \qquad \int C_\nu\, do = \int A_s\, ds,$$

wobei die positive Richtung von ν, die positive Richtung von s und die Richtung vom Rande nach innen ein Rechtssystem bilden. Man kann also etwa die positive Richtung von ν an irgend einem Punkte der Fläche willkürlich annehmen und dann auf der ganzen Fläche nach der Stetigkeit ändern, dann ist durch diese Regel die positive Richtung von s an jeder Stelle des Randes eindeutig bestimmt, auch wenn die Randcurve aus mehreren Stücken besteht. Wenn aber die Fläche selbst aus mehreren getrennten Theilen besteht, so kann in jedem von ihnen die positive Richtung von ν beliebig angenommen werden.

Bei einer einfach umrandeten Fläche kann man den Sinn der Integration auch dadurch angeben, dass eine fortschreitende Bewegung längs ν und gleichzeitige Drehung in der Richtung ds eine Rechtsschraubung ist.

§. 90.

Ausdruck des Curls in einem beliebigen Coordinatensysteme.

Der Stokes'sche Satz führt zu einer einfachen Darstellung der Componenten des Curls in einem krummlinigen Coordinatensysteme, das wir der Einfachheit halber orthogonal annehmen wollen. Es sei p, q, r also ein beliebiges krummliniges, aber

orthogonales Coordinatensystem und

$$(1)\qquad ds^2 = e\,dp^2 + e'\,dq^2 + e''\,dr^2$$

das Quadrat des Linienelementes (§. 37). Wir nehmen an, dass die Richtung der wachsenden p, q, r ein Rechtssystem bilden; $\sqrt{e}\,dp$, $\sqrt{e'}\,dq$, $\sqrt{e''}\,dr$ sind die Projectionen des Elementes ds auf die Richtungen p, q, r.

Es ist dann, wenn A_p, A_q, A_r, A_s die Componenten des Vectors $\mathfrak{A}$ nach den Richtungen p, q, r, ds bedeuten, nach §. 37 (6):

$$(2)\qquad \begin{aligned} & A_p\sqrt{e}\,dp + A_q\sqrt{e'}\,dq + A_r\sqrt{e''}\,dr \\ & = A\,ds\cos(A, ds) = A_s\,ds. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun $dp = 0$ an, legen also das Element ds in die Fläche (q, r) und grenzen in dieser Fläche durch eine geschlossene Curve s irgend ein beliebiges Flächenstück ab. Dann ergiebt sich nach (2) mit Benutzung von §. 40 (2), wenn die Integration über dieses Flächenstück und seine Begrenzung erstreckt wird:

$$(3)\qquad \begin{aligned} & \iint\left(\frac{\partial\sqrt{e''}A_r}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{e'}A_q}{\partial r}\right)dq\,dr \\ & = \int(A_q\sqrt{e'}\,dq + A_r\sqrt{e''}\,dr) = \int A_s\,ds, \end{aligned}$$

und das letzte Randintegral ist nach dem Stokes'schen Satze, wenn C_p die Componente von curl $\mathfrak{A}$ in der Richtung p bedeutet, nach §. 89, II. gleich

$$(4)\qquad \int C_p\,do = \iint C_p\sqrt{e'e''}\,dq\,dr.$$

Da die Flächenintegrale (3), (4) für jedes beliebige Flächenstück gelten, so folgt, wenn man dieselbe Betrachtung für die (r, p), (p, q)-Flächen durchführt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} C_p &= \frac{1}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}A_r}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{e'}A_q}{\partial r}\right), \\ C_q &= \frac{1}{\sqrt{e''e}}\left(\frac{\partial\sqrt{e}A_p}{\partial r} - \frac{\partial\sqrt{e''}A_r}{\partial p}\right), \\ C_r &= \frac{1}{\sqrt{ee'}}\left(\frac{\partial\sqrt{e'}A_q}{\partial p} - \frac{\partial\sqrt{e}A_p}{\partial r}\right). \end{aligned}$$

§. 91.

Stromlinien und Wirbellinien.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Vector in einem Felde, so erhalten wir, wenn wir, von einem beliebigen Punkte m ausgehend, in der Vectorrichtung zu einem unendlich benachbarten Punkte m' übergehen und von hier aus diese Construction fortsetzen, eine Curve, und wenn wir den Ausgangspunkt m verändern, so ergiebt sich eine doppelt unendliche Curvenschaar im Raume, die analytisch durch die Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = A_x : A_y : A_z$$

bestimmt ist. Diese Curven wollen wir Stromlinien nennen, weil sie in jedem ihrer Punkte die Richtung der Strömung angeben, wenn wir uns den Vector durch eine in Bewegung begriffene Flüssigkeit darstellen. Es beziehen sich in diesem Falle diese Curven nur auf einen bestimmten Zeitmoment. Im Allgemeinen werden sie mit der Zeit veränderlich sein.

Es sei nun σ eine bestimmte von diesen Stromlinien, auf der wir die Länge s von einem beliebigen Punkte aus in der jeweiligen Richtung der Vectoraxe positiv zählen. Wir legen in jedem Punkte dieser Linie ein unendlich kleines Flächenelement do senkrecht zu der Tangente an σ in diesem Punkte, also auch senkrecht zu dem Curvenelemente ds.

Legen wir durch alle Punkte eines dieser Elemente do, die zugehörigen Stromlinien, so werden sich diese alle in ihrem weiteren Verlaufe nur unendlich wenig von σ entfernen, und es werden sich auch keine zwei von ihnen durchschneiden, so lange wenigstens A_x, A_y, A_z endlich und nicht alle drei gleich Null sind. Diese Curven bilden in ihrer Gesammtheit einen Stromfaden. Den Querschnitt eines Stromfadens, der dem Stromfaden entlang veränderlich sein kann, bezeichnen wir mit q.

Wenden wir auf ein zwischen s_1 und s_2 verlaufendes und durch die beiden Querschnitte q_1, q_2 begrenztes Stück unseres Stromfadens den Gauss'schen Integralsatz (§. 89, I.) an, so ergiebt sich, wenn $s_1 < s_2$ ist, da an der äusseren Begrenzung des Fadens $A_n = 0$, an den Endflächen q_1, q_2 des Fadens A_n gleich A_1 und $-A_2$ und $d\tau = q\,ds$ ist:

$$\int_{s_1}^{s_2} q\,ds\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = A_2 q_2 - A_1 q_1,$$

n man nur ein unendlich kurzes Stück des Stromfadens t:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = \frac{1}{q}\frac{d\,Aq}{ds}.$$

em besonderen Falle, in dem

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = 0$$

ebt sich hieraus, dass Aq längs eines Stromfadens con-, und dass sich also der Querschnitt q umgekehrt pro- mit dem Tensor A ändert. In diesem Falle befindet Curl $\mathfrak{C}$ eines jeden Vectors $\mathfrak{A}$. Einen für den Vector $\mathfrak{C}$ ten Stromfaden nennen wir einen Wirbelfaden (nach ltz). Das Product Cq heisst das Moment des Wirbel- Es hat längs des ganzen Wirbelfadens einen un- erlichen Werth.

ren wir zu den Stromfäden zurück und bezeichnen mit Dichtigkeit der Flüssigkeit, durch deren Strömung wir tor $\mathfrak{A}$ darstellen, die auch eine Function des Ortes sein o ist $q\varrho A$ die Flüssigkeitsmenge, die durch den Quer- q eines Stromfadens hindurchgedrückt wird, und das

$$\int_{s_1}^{s_2} q\,ds\,\mathrm{div}\,\varrho\mathfrak{A} = A_2 q_2 \varrho_2 - A_1 q_1 \varrho_1$$

Zuwachs an Flüssigkeitsmasse, den das Fadenstück s_1 und s_2 erfahren hat. Ist das Fadenstück unendlich d von der Länge ds, so ist dieser Zuwachs also gleich

$$q\,ds\,\mathrm{div}\,\varrho\mathfrak{A};$$

en wir aber mit $\delta\varrho$ die Zunahme der Dichtigkeit, so ist anderen Seite die Zunahme an Masse $= q\,ds\,\delta\varrho$, und ergiebt sich

$$\delta\varrho = \mathrm{div}\,\varrho\mathfrak{A}.$$

§. 92.

Kraftlinien.

Man giebt dem Gauss'schen Integralsatze noch eine andere geometrische Deutung, bei der $\mathfrak{A}$ wieder einen beliebigen Vector bedeutet.

Wir nehmen irgend ein zu der Richtung s der Stromlinien senkrechtes Flächenelement q und legen durch dieses Stromlinien in einer mit A proportionalen Dichte, so dass, wenn m eine constante Grösse ist, die Anzahl der durch q gelegten Linien gleich $m A q$ ist. Während wir also bei der Erzeugung des Stromfadens angenommen haben, dass sich eine angefangene Stromlinie unbegrenzt fortsetze, müssen wir jetzt annehmen, dass diese Linien, je nach dem Werthe von A, aufhören oder neu anfangen. Diese Linien sollen Kraftlinien heissen; sie fallen ihrer Richtung nach mit den Stromlinien zusammen. Legen wir an derselben Stelle wie q ein Flächenelement do, dessen in einem bestimmten Sinne genommene Normale n mit s den Winkel (s, n) einschliesst, so ist die Anzahl der durch dieses Element im Sinne n gehenden Kraftlinien gleich

$$m A\, do \cos(s, n)$$

oder

$$m A_n\, do;$$

die Zahl ist negativ zu rechnen, wenn die Durchdringung von do in der dem n entgegengesetzen Richtung geschieht.

Wenn wir also jetzt den Gauss'schen Integralsatz auf einen beliebigen Raumtheil τ anwenden, so zeigt sich, dass das Integral

$$m \int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau,$$

über einen Raum τ erstreckt, gleich der Anzahl der aus der Begrenzung dieses Raumes austretenden Kraftlinien ist, und, auf ein Raumelement angewendet, ist $m \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau$ die Zahl der aus dem Raumelemente $d\tau$ austretenden, also im Inneren von $d\tau$ entspringenden Kraftlinien. Die eintretenden Kraftlinien werden hierbei negativ in Rechnung gebracht; diese erlöschen oder versinken in dem Elemente $d\tau$. Wenn $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ verschwindet, so wird keine Kraftlinie neu entspringen oder ver-

sinken, und in diesem Falle stimmen die Kraftlinien mit den Stromlinien überein.

In einem Raumtheile, in dem $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ einen positiven Werth hat, werden Kraftlinien neu entspringen, während in solchem, wo $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ negativ ist, Kraftlinien verschwinden. Die ersteren heissen Quellen, die anderen Senken (oder negative Quellen).

Es kommt oft vor, dass die Quellen auf einen unendlich kleinen Raumtheil beschränkt sind. Ein solcher Raumtheil, den man in endlicher Entfernung als Punkt ansehen kann, heisst Quellpunkt. Ist e der als endlich angesehene Werth des über einen solchen Raumtheil erstreckten Integrals

$$\int \operatorname{div}\mathfrak{A}\, d\tau,$$

so ist für jede einen solchen Punkt umschliessende Fläche

$$\int A_n\, do = e.$$

Nehmen wir eine Kugelfläche vom Radius r, die den Quellpunkt als Mittelpunkt hat, und bezeichnen mit $d\omega$ ein Flächenelement auf der Einheitskugel, so ist $do = r^2 d\omega$

$$\int A_n\, d\omega = \frac{e}{r^2},$$

und folglich ist der Mittelwerth von A_n auf einer solchen Kugel

$$= \frac{e}{4\pi r^2}.$$

Der Tensor des Vectors $\mathfrak{A}$ wird also bei der Annäherung an den Quellpunkt unendlich gross, und zwar in derselben Ordnung wie $1/r^2$.

In einem Felde, wo $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ verschwindet, kann eine Kraftlinie weder entspringen noch endigen. Die Kraftlinien verlaufen also in einem solchen Felde in Canälen vom Querschnitte q, so dass Aq längs eines solchen Canals constant ist. Man kann den Vector dann auch als Verschiebung einer incompressiblen Flüssigkeit darstellen, die dann in eben diesen Canälen, die mit den Stromfäden zusammenfallen, hinströmt. Daher haben die Vectoren, deren Divergenz verschwindet, auch den Namen solenoidale Vectoren erhalten [1]).

---

[1]) Von ὁ σωλήν, die Röhre.

§. 93.

Potentialvectoren.

Einen Vector, dessen Curl im ganzen Felde verschwindet, nennen wir einen **Potentialvector**. Ist $\mathfrak{E}$ ein solcher Vector und sind E_x, E_y, E_z seine Componenten, so ist

$$(1) \qquad E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz = -d\psi$$

ein vollständiges Differential eines Skalars $-\psi$. Es ist also

$$(2) \qquad E_x = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

und die Function ψ heisst das **Potential des Vectors** $\mathfrak{E}$. Diese Function ist nur bis auf eine additive Constante bestimmt, und man kann sie erhalten, wenn man von einem festen Punkte p_0 zu dem veränderlichen Punkte p längs einer beliebigen Curve das Integral nimmt:

$$(3) \qquad \psi = -\int_{s_0}^{s} E_s\,ds,$$

worin E_s die Componente von $\mathfrak{E}$ in der Richtung von s bedeutet.

Der **Stokes'sche Satz** zeigt, dass das Integral

$$(4) \qquad \int E_s\,ds = 0$$

ist, wenn man es über eine geschlossene Curve erstreckt, die man als Begrenzung einer ganz in dem Vectorfelde verlaufenden Fläche betrachten kann.

Man nennt ein Feld **einfach zusammenhängend**, wenn es so beschaffen ist, dass jede in sich zurücklaufende Curve die Begrenzung eines ganz in dem Felde gelegenen Flächenstückes ist. Ein solches einfach zusammenhängendes Feld ist z. B. der ganze unendliche Raum, oder der Raum ausserhalb einer Kugel, oder auch ausserhalb mehrerer, einander nicht schneidender Kugeln, und hierin wird auch nichts geändert, wenn an Stelle der Kugeln andere Flächen treten, die aus Kugeln durch stetige Formänderung abgeleitet sind. Ebenso ist der Raum innerhalb einer Kugel oder einer aus der Kugel ab-

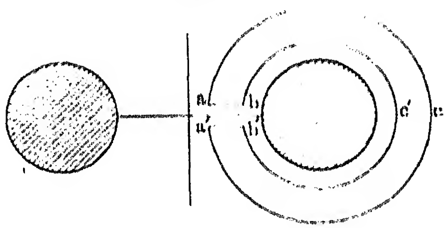
Raum einfach zusammenhängend.

Um auch ein Beispiel von einem mehrfach zusammenhängenden Felde zu haben, denke man etwa an den Raum innerhalb oder ausserhalb einer Ringfläche, die durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegenden, aber die Peripherie nicht schneidenden Axe entsteht. Die mehrfach zusammenhängenden Felder werden durch gewisse Trennungsflächen, die man **Querschnitte** oder auch **Sperrflächen** nennt, deren beide Seiten zur Begrenzug hinzugenommen werden, in einfach zusammenhängende Felder verwandelt, so z. B. das Feld ausserhalb des oben beschriebenen Ringes durch einen ebenen Schnitt, der durch den inneren Aequatorkreis begrenzt ist.

In einem einfach zusammenhängenden Felde ist das Integral (4) über jede geschlossene Curve gleich Null, und die Function ψ ist dann in diesem Felde überall eindeutig und stetig.

In einem mehrfach zusammenhängenden Felde kann es geschlossene Linien geben, über die das Integral (4) nicht verschwindet, und es giebt dann Flächen, auf deren beiden Seiten ψ verschiedene Werthe hat. So stellen in der beistehenden Fig. 38 die beiden schraffirten Kreise den Meridianschnitt des oben erwähnten Ringes dar. In den zwei Punkten a, a', die einander unendlich nahe liegen, hat ψ zwei verschiedene Werthe, deren Unterschied das über die Curve $(a c a')$ genommene Integral

Fig. 38.



$$\int E^s\, d s$$

ist. Dagegen ist das Integral über die ganze Begrenzung $(a c a' b' c' b a)$ wieder gleich Null, und hierin heben sich die beiden Bestandtheile über $(a' b')$ und über $(b a)$ gegenseitig auf. Folglich haben die Integrale über $(a c a')$ und $(b c' b')$ denselben Werth, und der Werthunterschied der Function ψ zu beiden Seiten der Sperrfläche ist längs dieser ganzen Fläche constant. Wenn man also den Integrationsweg von einem beliebigen Punkte a' zum Ausgangspunkte zurückführt, so erhält unter Umständen

die Function ψ in diesem Punkte einen von dem verschiedenen Werth. Die Function ist dann m

Wir müssen also einwerthige und Vectorpotentiale unterscheiden:

In einem einfach zusammenhän ist jedes Vectorpotential einwert

In einem mehrfach zusammenhä giebt es mehrwerthige Vectorpote durch Anlegung von Querschni werthigen Functionen werden. An ten sind diese Potentiale unstetig beim Durchgange durch eine sprungweise Aenderungen, die ab und derselben Querschnittfläche

Es kann aber auch in mehrfach zusammenh einwerthige Vectorpotentiale geben. Dies findet wenn die Componente E_s in jeder in einer liegenden Richtung gleich Null ist. Dann hat fläche einen constanten Werth, und wenn ma von einer Seite eines Querschnittes zur andern der Grenze liegende Curve vermittelt, so ist Curve genommene Integral

$$\int E_s \, ds = 0.$$

Wir wollen noch auf die Analogie dieser sechsten Abschnitte besprochenen Sätzen über von Functionen eines complexen Argumentes aufs

§. 94.

Vectoren mit verschwindender Div

Den Potentialvectoren stehen als ein nicht Specialfall die Vectoren zur Seite, deren Diverg Wir haben schon oben gesehen, dass der Curl diese Eigenschaft hat. Es gilt aber auch der

1. dass jeder Vector mit verschwi genz als Curl eines anderen Vect werden kann.

Es sei $\mathfrak{C}$ ein gegebener Vector, der der Bedingung

(1) $$\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0$$

genügt, und wir suchen einen Vector $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, so dass

(2) $$\mathfrak{C} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

wird. Dieser Vector $\mathfrak{A}$ kann selbstverständlich nur bis auf einen additiv hinzutretenden willkürlichen Potentialvector bestimmt sein. Um (2) zu befriedigen, setzen wir $\mathfrak{A}$ als Curl eines dritten Vectors $\mathfrak{B}$ voraus, also

(3) $$\mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{B},$$

(4) $$\mathfrak{C} = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{B}.$$

Wenn man aber die Componenten des Vectors $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{B}$ bildet, so giebt eine einfache Rechnung aus (4)

(5) $$C_x = \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{B}}{\partial x} - \Delta \mathfrak{B}_x,$$

worin Δ wie früher die Bedeutung hat:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Hiernach wird also die Gleichung (2) durch (3) befriedigt, wenn wir $\mathfrak{B}$ den Bedingungen unterwerfen:

(6) $$\Delta B_x = -C_x, \quad \Delta B_y = -C_y, \quad \Delta B_z = -C_z,$$

(7) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0.$$

Wir haben hier vier Differentialgleichungen für die drei Functionen B_x, B_y, B_z, die aber nicht von einander unabhängig sind, da aus den drei ersten

$$\Delta \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

folgt. Wir werden im folgenden Abschnitte sehen, dass die Differentialgleichungen (6) z. B. immer dann eine Lösung haben, wenn C_x, C_y, C_z in einem endlichen Raumstücke beliebig gegeben sind und ausserhalb dieses Raumstückes verschwinden, und dass dann, wenn $\operatorname{div} \mathfrak{C}$ verschwindet, auch die Gleichung (7) befriedigt ist. Hier wollen wir über die Integration dieser Gleichungen noch Folgendes bemerken:

Angenommen, es sei B_x, B_y irgendwie bestimmt, so dass sie den beiden ersten Gleichungen (6) genügen. Dann giebt die Gleichung (7) $\partial B_z / \partial z$, also B_z, bis auf eine willkürliche Function von x und y. Wir setzen daher

(8) $$B_z = B_z' + \chi(x, y),$$

worin B'_z irgend einer bestimmten Annahme über diese willkürliche Function entspricht. Aus den Gleichungen (6) folgt aber

$$\frac{\partial \Delta B_z}{\partial z} = \frac{\partial \Delta B'_z}{\partial z} = -\frac{\partial C'_z}{\partial z},$$

und folglich

$$\Delta B'_z = -C'_z + \Phi(x, y), \tag{9}$$

worin $\Phi(x, y)$ eine (durch B'_z bestimmte) Function von x, y allein ist. Aus (8) ersieht man, dass die letzte Bedingung (6) befriedigt wird, wenn

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = -\Phi(x, y) \tag{10}$$

gesetzt wird. Hiernach ist also die Bestimmung des Vectors $\mathfrak{B}$ auf die Integration der drei Gleichungen

$$\Delta B_x = -C'_x, \quad \Delta B_y = -C'_y, \quad \Delta \chi = -\Phi \tag{11}$$

zurückgeführt, und unser Satz ist bewiesen, wenn wir voraussetzen, dass die Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = -\varrho \tag{12}$$

für jede gegebene Function ϱ eine Lösung hat.

Für diese Betrachtungen ist nicht erforderlich, dass ϱ im ganzen Raume gegeben sei; wir können uns auf die Betrachtung eines beliebig kleinen Raumtheiles beschränken, und auch für die Function φ nur nach den Werthen in diesem Raumtheile fragen. Dann hat aber die Differentialgleichung (12) unendlich viele Lösungen.

Ein Corollar aus diesen Sätzen ist noch der Satz:

2. **Jeder Vector lässt sich in einen Potentialvector und in einen Curl zerlegen.**

Ist nämlich $\mathfrak{A}$ ein gegebener Vector, so setzen wir

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \tag{13}$$

und bestimmen eine Function q aus der Differentialgleichung

$$\Delta q = \operatorname{div} \mathfrak{A};$$

wenn wir dann $\mathfrak{B}$ gleich dem Gradienten von q, also [§. 88 (10)]

$$\mathfrak{B} = \operatorname{grad} q, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mathfrak{A}$$

setzen, so ist $\operatorname{div} \mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{C}$ ist also nach 1. ein Curl.

Elfter Abschnitt.

Potentiale.

§. 95.

Vorbereitung zum Green'schen Satze.

Es seien U, V zwei skalare Functionen. Aus ihnen lässt sich ein Vector $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(U, V)$ ableiten, dessen Componenten die folgenden sind:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
A_x &= U \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial U}{\partial x}, \\
A_y &= U \frac{\partial V}{\partial y} - V \frac{\partial U}{\partial y}, \\
A_z &= U \frac{\partial V}{\partial z} - V \frac{\partial U}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

Dieser Vector ist unabhängig vom Coordinatensysteme. Denn nehmen wir eine beliebige gerade Linie, auf der wir von einem willkürlichen Anfangspunkte die Abscissen ξ zählen, so können wir jede Function von x, y, z längs dieser Linie als Function von ξ ansehen. Insbesondere sind also auch x, y, z selbst Functionen von ξ, und es ist

$$
(2) \qquad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos(\xi, x), \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \cos(\xi, y), \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \cos(\xi, z).
$$

Hiernach ergiebt sich aus (1)

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
A_\xi &= A_x \cos(\xi, x) + A_y \cos(\xi, y) + A_z \cos(\xi, z) \\
&= U \frac{\partial V}{\partial \xi} - V \frac{\partial U}{\partial \xi}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir also ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η, ζ einführen, so erhalten die Ausdrücke für die Componenten von $\mathfrak{A}$ nach diesen neuen Axen genau dieselbe Form wie für die Axen x, y, z.

Aus (1) ergiebt sich zunächst nach §. 87 (3)

(4) $$\operatorname{div} \mathfrak{A} = U \Delta V - V \Delta U,$$

wenn unter ΔU, wie in der Folge stets, der zweite Differentialparameter

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

verstanden wird.

Wir grenzen einen Raumtheil τ durch eine geschlossene Fläche O ab, in dem die Functionen U, V stetig sind und stetige Derivirte haben. In jedem Punkte der Oberfläche O denken wir uns eine Normale n in das Innere von τ gezogen. Dann ist nach (3):

$$A_n = U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n},$$

und die Anwendung des Gauss'schen Satzes auf den Raum τ ergiebt

(5) $$\int (U \Delta V - V \Delta U)\, d\tau = -\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) do,$$

worin sich die Integrationen auf alle Elemente $d\tau$ und do von τ und O erstrecken.

§. 96.

Specialisirung der Function U.

Wenn wir in der zuletzt abgeleiteten Formel $U = 1$ annehmen, so ergiebt sich für jede in dem Gebiete τ mit ihren ersten Ableitungen stetige Function V

(1) $$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, do = -\int \Delta V\, d\tau.$$

Es sei ferner q ein variabler Punkt des Gebietes τ mit den Coordinaten a, b, c und p ein Punkt mit den Coordinaten x, y, z.

Die Entfernung der beiden Punkte sei r, so dass

$$(2) \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = \frac{x-a}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} = \frac{y-b}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial b^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} = \frac{z-c}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(z-c)^2}{r^5},$$

und daraus folgt durch Addition die Identität:

$$(3) \qquad \Delta \frac{1}{r} = 0,$$

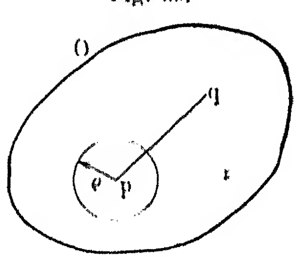
wenn bei der Differentiation die Coordinaten a, b, c als veränderlich, x, y, z als fest gelten.

Wenn nun der Punkt p ausserhalb des Gebietes τ liegt, so können wir ohne Weiteres $U = 1/r$ setzen, und erhalten aus der Formel §. 95 (5)

$$(4) \qquad \int \Delta V \frac{d\tau}{r} + \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) do = 0.$$

Liegt aber der Punkt p innerhalb τ, so wird $1/r$ als Function des Punktes q in p unendlich, und wenn wir daher die Formel auch jetzt noch auf $U = 1/r$ anwenden wollen, müssen wir den Punkt p durch eine Hülle k, die wir als eine mit dem willkürlichen Radius ϱ um den Punkt p als Mittelpunkt beschriebene Kugelfläche annehmen, von dem Gebiete τ ausschliessen. Das so veränderte Gebiet bezeichnen wir mit τ^*.

Fig. 39.



Machen wir also diese Annahme, so ergiebt die Formel §. 95 (5) für das Gebiet τ^*

$$(5)\qquad \int \Delta V \frac{d\tau}{r} + \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d o = 0.$$

Das Oberflächenintegral enthält hier als Bestandtheil das Integral über die Oberfläche der Kugel k.

Bezeichnen wir nun mit $d\omega$ ein Element der Kugel mit dem Radius 1 (Einheitskugel), so ist ein Element einer Kugelfläche mit dem Radius r

$$(6)\qquad d o = r^2 d\omega,$$

und ein Volumenelement, das von zwei concentrischen Elementen $d o$ in der Entfernung $d r$ und dem zugehörigen Stücke eines Kegelmantels mit der Spitze in p begrenzt ist, hat den Ausdruck

$$(7)\qquad d\tau = r^2 d r d\omega.$$

An der Oberfläche von k fällt die Normale n mit der Richtung r zusammen und es ist also dort

$$(8)\qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{\varrho^2}.$$

Hiernach ist der auf k bezügliche Bestandtheil des Flächenintegrals in (5)

$$(9)\qquad \varrho \int \frac{\partial V}{\partial r} d\omega + \int V d\omega,$$

worin sich die Integration nach $d\omega$ auf die ganze Kugelfläche mit dem Radius 1 erstreckt und unter dem Integralzeichen $r = \varrho$ zu setzen ist.

Wenn im Punkte p die Function V und ihre Differentialquotienten endlich sind, so ist auch

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial a} \cos(r, x) + \frac{\partial V}{\partial b} \cos(r, y) + \frac{\partial V}{\partial c} \cos(r, z)$$

in p endlich, wenn auch sein Werth von der Richtung abhängt, in der man in den Punkt p hineingeht.

Wenn wir daher jetzt die Hülle k unendlich klein werden, also ϱ gegen Null convergiren lassen, so nähert sich

$$\varrho \int \frac{\partial V}{\partial r} d\omega$$

der Grenze Null, und wenn die Function V im Punkte p den

$$(10) \qquad \lim \int V\, d\omega = 4\pi V_p.$$

In dem Raumintegrale der Formel (5) fehlt nun an dem über das ganze Gebiet τ genommenen Integrale der über den Raum von k genommene Bestandtheil, der nach (7) den Ausdruck hat:

$$\int \Delta V\, r\, dr\, d\omega,$$

und der also, wenn wir noch voraussetzen, dass ΔV im Punkte p endlich bleibt, mit ϱ zugleich unendlich klein wird. Nach alledem nimmt (5) die Form an:

$$(11) \qquad 4\pi V_p = -\int \Delta V \frac{d\tau}{r} - \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) do,$$

worin sich jetzt die Integration in Bezug auf $d\tau$ auf das ganze ursprüngliche Gebiet τ und die Integration nach do auf dessen Begrenzung erstreckt. Von der den Punkt p umgebenden Hülle k ist in der Gleichung (11) jede Spur verschwunden.

Aus (4) und (11) ergiebt sich ein specieller Fall, den man erhält, wenn man $V = 1$ annimmt. Es wird dann $\Delta V = 0$, $\partial V / \partial n = 0$, und folglich

$$(12) \qquad \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, do = 0 \quad \text{oder} \quad = 4\pi,$$

je nachdem der Punkt p ausserhalb oder innerhalb der Fläche O liegt. Ist ψ eine der Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ genügende Function, und ist $\psi + 1/r$ in dem Gebiete τ stetig, so ergiebt sich hieraus mit Benutzung von (1), wenn p ein innerer Punkt ist:

$$(13) \qquad \int \frac{\partial \psi}{\partial n}\, do = -4\pi.$$

§. 97.

Der Green'sche Satz.

Wir setzen nun die Formeln §. 95 (5) und die daraus abgeleitete Formel §. 96 (11) unter einander:

$$0 = \int (V.\Delta U - U.\Delta V)\, d\tau - \int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}\right) do,$$

$$4\pi V_p = \quad - \int \Delta V \frac{d\tau}{r} - \int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) do.$$

Sie gelten gleichzeitig, wenn U und V mit ihren ersten Derivirten im Gebiete τ stetig sind, und wenn wir also die erste von der zweiten subtrahiren, so folgt

$$(1) \qquad 4\pi V_p = \int \left(U - \frac{1}{r}\right) . \Delta V\, d\tau - \int V . \Delta U\, d\tau$$
$$+ \int \left[\left(U - \frac{1}{r}\right) \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left(U - \frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right] do.$$

Wir verstehen nun unter der **Green'schen Function** des Raumes τ eine Function G eines Punktes q dieses Gebietes, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Im Raume τ ist G überall, mit Ausnahme eines Punktes p, endlich und stetig und hat stetige Derivirte.
2. Ist r die Entfernung der beiden Punkte p und q, so ist die Function $G + 1/r$ auch in dem Punkte p stetig.
3. Im ganzen Gebiete τ ist $\Delta G = 0$.
4. An der Grenze des Gebietes τ ist $G = 0$.

G ist hiernach eine Function der beiden Punkte p und q. Bei der Definition gilt q als variabel, p als fest.

Den Bedingungen 1., 2., 3. genügt die Function $-1/r$ selbst, nicht aber der Bedingung 4.

Ist eine solche Function G bekannt, so können wir in der Formel (1) $U = G + 1/r$ setzen. Dann ist $\Delta U = 0$ und wir erhalten:

$$(2) \qquad 4\pi V_p = \int G . \Delta V\, d\tau - \int V \frac{\partial G}{\partial n}\, do,$$

und diese Formel ist es, die unter dem Namen des **Green'schen Satzes** bekannt ist.

Wir schliessen aus diesem Satze zunächst:

1. Es giebt für einen gegebenen Raum τ, für einen gegebenen Punkt p nicht mehr als eine Green'sche Function.

Denn angenommen, es gebe zwei solche Functionen, G und G', so ist die Differenz $G - G'$ eine Function, die in dem ganzen Gebiete τ mit ihren Derivirten stetig ist. Es ist aber ausserdem im Inneren von τ überall $\Delta(G - G') = 0$, und an der Grenzfläche O überall $G - G' = 0$; setzen wir also in der Formel (2) $V = G - G'$, so ergiebt sich $V_p = 0$, d. h. es ist $G = G'$ im ganzen Raume τ.

Die Formel (2) löst uns ferner, wenn die Green'sche Function bekannt ist, die Aufgabe:

2. Es soll eine Function V gefunden werden, die im ganzen Raume τ mit ihren Derivirten stetig ist, wenn die Werthe von ΔV im Inneren von τ und die Werthe von V an der Oberfläche O von τ gegeben sind.

Die Formel (2) giebt nämlich unmittelbar aus diesen Daten die Function V in einem beliebigen Punkte p und zeigt ausserdem, dass es nur eine Lösung der Aufgabe giebt.

Die Bestimmung der Function G selbst ist ein specieller Fall dieser Aufgabe und gelingt nur in besonderen Fällen. Ihre Bestimmung ist eine Fundamentalaufgabe in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen und ihren Anwendungen auf die mathematische Physik.

Wir beweisen noch den folgenden Satz über die Green'sche Function.

3. Bezeichnet man die Green'sche Function, um ihre Abhängigkeit von den beiden Punkten p, q anzudeuten, mit $G_{p,q}$, so ist

$$G_{p,q} = G_{q,p}. \tag{3}$$

Der Beweis ergiebt sich so: Wir nehmen die beiden Green'schen Functionen $G_{p_1,q}$, $G_{p_2,q}$ für dasselbe Gebiet τ und schliessen von diesem Gebiete die beiden Punkte p_1, p_2 durch kleine Kugeln k_1, k_2 mit den Radien ϱ_1, ϱ_2 aus. Auf das so geschaffene Gebiet τ' wenden wir die Formel (5) §. 95 an, indem wir $U = G_{p_1,q}$, $V = G_{p_2,q}$ setzen, und verfahren dann ebenso wie in §. 96. Wir erhalten dann

$$4\pi\,(G_{p_2,p_1} - G_{p_1,p_2}) = -\int\left(G_{p_1,q}\frac{\partial G_{p_2,q}}{\partial n} - G_{p_2,q}\frac{\partial G_{p_1,q}}{\partial n}\right)do, \tag{4}$$

und daraus, da $G_{p_1,q}$, $G_{p_2,q}$ an der Grenze verschwinden,

$$G_{p_2,p_1} = G_{p_1,p_2},$$

wie bewiesen werden sollte.

§. 98.

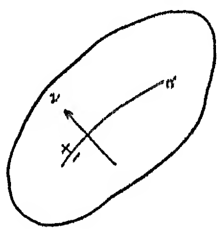
Unstetigkeiten.

Wir wollen nun annehmen, dass in dem Felde τ eine Fläche σ liege, in der V und seine Differentialquotienten unstetig sind. Wir nehmen an, dass die Functionen

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

im ganzen Gebiete τ mit Ausnahme der Fläche σ, bestimmte, stetig veränderliche Werthe haben, dass diese Werthe aber in zwei unendlich benachbarten Punkten auf beiden Seiten von σ um eine endliche Grösse verschieden sind.

Fig. 40.



Wir ziehen, wie die Fig. 40 zeigt, durch jeden Punkt der Fläche σ eine Normale ν, die wir in einer beliebigen, aber über die ganze Fläche festzuhaltenden Richtung positiv nehmen, und nennen die Seite der Fläche σ, die auf der Seite der wachsenden ν liegt, die positive Seite dieser Fläche. Die Werthe von V in benachbarten Punkten auf den beiden Seiten von σ unterscheiden wir als V^+ und V^-, und bezeichnen analog auch die Differentialquotienten.

Es lässt sich dann die Formel §. 96. (11) anwenden, wenn wir beide Seiten der Fläche σ mit zu der Begrenzung von τ rechnen. Auf der positiven Seite von σ ist dann $dn = d\nu$, auf der negativen $dn = -d\nu$ anzunehmen. Der Punkt p soll nicht auf der Fläche σ liegen.

Bezeichnen wir also mit $d\sigma$ ein Element der Fläche σ und beziehen die Integration nach $d\sigma$ auf diese ganze Fläche, während do die ursprüngliche Grenze des Gebietes τ (ohne σ) durchläuft, so ergiebt die Formel §. 96. (11)

$$(1)\qquad 4\pi V_p = -\int \Delta V\frac{d\tau}{r} - \int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)do$$
$$-\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^{-}\right]\frac{d\sigma}{r} + \int (V^{+} - V^{-})\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

Hierin ist, um daran zu erinnern, r die Entfernung des Punktes p von einem Punkte des Integrationselementes $d\tau$, do, $d\sigma$, und es sind demnach die Integrale noch Functionen der Coordinaten des Punktes p.

Die Formel (1) gilt selbstverständlich auch, wenn σ aus mehreren getrennten Stücken besteht, oder, was dasselbe ist, wenn im Gebiete τ mehrere verschiedene Unstetigkeitsflächen liegen.

§. 99.

Unendliche Felder.

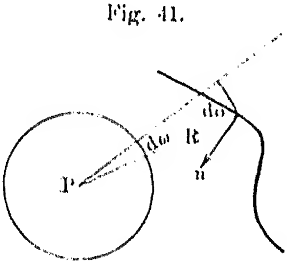
Wir nehmen jetzt wieder das in der Formel §. 95 (5) vorkommende Flächenintegral

$$(1)\qquad \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)do,$$

um die Veränderung zu untersuchen, die eintritt, wenn sich das Feld τ ins Unendliche erstreckt.

Wir nehmen einen festen Punkt P und bezeichnen mit R die Entfernung des Punktes P von dem Elemente do. Ist wieder $d\omega$ ein Element der mit dem Radius 1 um P beschriebenen Kugel, so ist, wenn der Winkel (n, R) spitz genommen wird (siehe Fig. 41)

Fig. 41.



$$do = R^2\,d\omega\cos(n, R),$$

und das Integral (1) lässt sich also auch so darstellen:

$$(2)\qquad \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)\cos(n, R)\,R^2\,d\omega.$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Grenzfläche O so beschaffen und der Punkt P so gewählt sei, dass

jeder Strahl R die Fläche O in einem und nur in einem Punkte trifft. Dann erstreckt sich die Integration in Bezug auf $d\omega$ in (2) einfach über die ganze Einheitskugel, also über ein endliches Gebiet. Es ist leicht zu sehen, welche Modificationen in dieser Beziehung eintreten, wenn diese Voraussetzung nicht gemacht wird. Für unseren Zweck ist dies nicht erforderlich.

Nehmen wir nun an, die Functionen U, V seien im ganzen unendlichen Raume gegeben. Es soll aber vorausgesetzt sein:

$$\text{(3)} \qquad \text{für } R = \infty \text{ ist } U = 0, \quad V = 0,$$

$$R^2 \frac{\partial U}{\partial l}, \quad R^2 \frac{\partial V}{\partial l} \quad \text{endlich,}$$

wenn l eine beliebige Richtung ist; das heisst, die letzten Producte sollen, wie gross auch R angenommen wird, bestimmte endliche Grenzen nicht überschreiten. Es ist nicht erforderlich, anzunehmen, dass diese Producte für $R = \infty$ bestimmte endliche Grenzwerthe haben. Um sich in einem gegebenen Falle davon zu überzeugen, ob diese Bedingungen erfüllt sind, genügt es, die Richtung l nach einander mit den drei Coordinatenrichtungen x, y, z zusammenfallen zu lassen.

Unter diesen Annahmen werden die Producte

$$R^2 U \frac{\partial V}{\partial n}, \quad R^2 V \frac{\partial U}{\partial n}$$

im Unendlichen verschwinden, während das Integrationsgebiet für $d\omega$, wie auch die Fläche O sich verändern mag, immer dasselbe bleibt. Wenn wir daher die Grenzfläche O allerseits ins Unendliche hinausrücken lassen, etwa wie eine Kugel, deren Radius ohne Grenzen wächst (oder auch sonst beliebig), so wird sich das Integral (2) der Grenze Null nähern.

Ist wieder r die Entfernung des Punktes p von dem Punkte q mit den Coordinaten x, y, z, so ist

$$R^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{R^2}{r^2} \cos(r, x), \ldots,$$

und die Forderung (3) ist für die Function U erfüllt, wenn wir $U = 1/r$ annehmen. Denn R und r sind die Entfernungen desselben Punktes q von den beiden festen Punkten P, p und $R : r$ hat also den Grenzwerth 1, wenn q ins Unendliche rückt. Wenn

nun für die Function V beliebige Unstetigkeitsflächen σ vorhanden sind, so ergiebt die Formel §. 98 (1)

(4) $$4\pi V_p =$$
$$-\int \Delta V \frac{d\tau}{r} - \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^-\right] \frac{d\sigma}{r} + \int (V^+ - V^-) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Hierin erstreckt sich das Integral nach $d\tau$ über den ganzen unendlichen Raum, und unsere Ableitung zeigt zugleich, dass die über V gemachten Voraussetzungen genügen, um die Convergenz dieses Integrals sicher zu stellen.

Setzt man, vorläufig nur zur Abkürzung,

(5) $$\Delta V = -4\pi\varrho,$$

(6) $$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^- = -4\pi\varepsilon,$$

(7) $$V^+ - V^- = 4\pi\eta,$$

so erhält die Formel (4) die einfachere Form:

(8) $$V_p = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r} + \int \frac{\varepsilon\, d\sigma}{r} + \int \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

und diese Formel zeigt, dass eine Function V, die im Unendlichen den Bedingungen (3) genügt, und abgesehen von einzelnen Flächen σ mit ihren ersten Ableitungen stetig ist, **eindeutig bestimmt ist**, wenn im ganzen unendlichen Raume ΔV gegeben und an den Flächen σ die Unstetigkeiten von V und seines nach der Normalen genommenen Differentialquotienten gegeben sind.

Die Stetigkeit von ϱ ist hierbei keineswegs vorausgesetzt, und es ist z. B. die Annahme zulässig, dass ϱ nur in einem endlichen Raumtheile von Null verschieden, sonst überall $= 0$ sei.

Durch diese Betrachtungen lässt sich auch der Green'sche Satz [§. 97 (2)] auf den Fall eines ins Unendliche ausgedehnten Gebietes τ übertragen, wenn wir für diesen Fall zu den die Green'sche Function G definirenden Eigenschaften §. 97, 1., 2., 3., 4. noch die weitere hinzufügen.

5. Im Unendlichen soll $G = 0$ und $R^2 \partial G / \partial l$ endlich sein.

§. 100.

Das Newton'sche Potential.

Die zuletzt abgeleitete Formel (8) ist mit Rücksicht auf die Definitionen von ϱ, ε, η eine blosse Identität. Sie enthält eine Darstellung einer gewissen, sehr allgemeinen Stetigkeitsbedingungen unterworfenen Function V durch bestimmte Integrale.

Wenn wir uns aber auf einen anderen Standpunkt stellen und ausser den Flächen σ die Functionen ϱ, ε, η als beliebig gegebene annehmen, so dient die Formel (8) zur Definition einer Function V, und es entsteht die Frage, ob diese Function V dann auch wirklich den Bedingungen (5), (6), (7) des vorigen Paragraphen genügt.

Die drei Bestandtheile, aus denen der angegebene Ausdruck von V besteht:

$$(1) \qquad P = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r}, \quad F = \int \frac{\varepsilon\, d\sigma}{r}, \quad \Phi = \int \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

heissen Potentiale, zum Unterschiede von anderen Bedeutungen, in denen dies Wort wohl sonst noch gebraucht wird, Newton'sche Potentiale mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Functionen in der Theorie der Kräfte, die nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze wirken. Wir wollen zunächst die Function P allein betrachten, in der wir aber ein für allemal voraussetzen wollen, dass ϱ nur in einem endlichen Theile des Raumes von Null verschieden sei; ausserdem wollen wir die Function ϱ überall endlich annehmen und beliebige Unstetigkeiten in Flächen zulassen. Die Function ϱ möge die Massendichtigkeit und

$$\varrho\, d\tau = dm$$

das Massenelement heissen. Wir denken dabei zunächst gar nicht an die mechanische und physikalische Bedeutung dieser Ausdrücke und schliessen z. B. keineswegs den Fall aus, dass ϱ auch negativ sei.

Die Function F kann als Specialfall, oder genauer gesagt, als Grenzfall der Function P aufgefasst werden. Denken wir uns nämlich die Fläche σ als einen unendlich dünnen Körper von

der Dicke $d\nu$ und bilden das Potential P für diesen Körper mit der Massendichtigkeit ϱ, so wird $dm = \varrho\, d\nu\, d\sigma$

$$P = \int \frac{dm}{r}, \tag{2}$$

und wir brauchen nur $\varrho\, d\nu = \varepsilon$ zu setzen, so geht P in F über. Da ε endlich sein soll, so muss hierbei ϱ mit unendlich abnehmenden $d\nu$ unendlich gross werden.

ε heisst die Flächendichtigkeit und F ein Flächenpotential.

Ebenso lässt sich Φ als Grenzfall von F betrachten. Wir denken uns zu diesem Zwecke über der Fläche σ eine parallele Fläche σ' in der unendlich kleinen Entfernung $d\nu$, so dass jedem Punkte von σ der Punkt von σ' gegenüber steht, der durch die Normale $d\nu$ getroffen wird. Das Flächenelement $d\sigma$ sei mit der Flächendichte ε belegt, das gegenüberstehende Element $d\sigma'$ mit $+\varepsilon'$. Es ist dann das Potential dieser Doppelfläche, wenn r' die Entfernung des Punktes p von $d\sigma'$ ist:

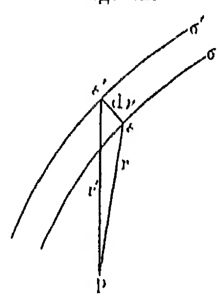


Fig. 42.

$$F = \int \frac{\varepsilon'\, d\sigma'}{r'} + \int \frac{\varepsilon\, d\sigma}{r}. \tag{3}$$

Wir nehmen dann die Dichtigkeit ε' so an, dass

$$\varepsilon'\, d\sigma' = -\varepsilon\, d\sigma, \tag{4}$$

d. h., dass auf gleichen Flächenstücken von σ und σ' gleiche, aber entgegengesetzte Massen liegen. Wenn wir dann noch nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\nu \tag{5}$$

setzen, so ergiebt sich aus (3), (4) und (5)

$$F = -\int \varepsilon \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\nu\, d\sigma,$$

und dies geht in Φ über, wenn $\eta = \varepsilon\, d\nu$ gesetzt wird, so dass auch hier ε für ein unendlich kleines $d\nu$ unendlich gross wird.

Die Function Φ heisst daher das Potential einer Doppelschicht und η die Dichtigkeit der Doppelbelegung.

§. 101.

Die Kraftcomponenten.

Das räumliche Potential

$$P = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r}, \tag{1}$$

in dem sich, wie wir festgesetzt haben, das Integral nach $d\tau$ auf ein endliches Gebiet τ erstreckt, ist eine Function der Coordination x, y, z des Punktes p. Wir sagen, das Potential beziehe sich auf den Punkt p. Es ist dann r die Entfernung dieses Punktes von dem Integrationselemente $d\tau$. Liegt der Punkt p ausserhalb des Raumes τ, so nennen wir ihn einen äusseren Punkt. Ueber die Convergenz des Integrals ist dann kein Zweifel, weil r nicht unter einen gewissen positiven Werth heruntersinkt. Dass aber auch die Convergenz nicht aufhört, wenn der Punkt p ein innerer Punkt ist, worunter wir einen Punkt verstehen, der dem Gebiete τ angehört, ergiebt die Einführung von Polarcoordinaten um den Punkt p. Denn bezeichnet wie früher $d\omega$ das Flächenelement auf der Einheitskugel, so können wir nach §. 96 (7)

$$d\tau = r^2 dr\, d\omega \tag{2}$$

setzen und erhalten

$$P = \int \varrho\, r\, dr\, d\omega,$$

wo nun die Function unter dem Integralzeichen im Integrationsgebiete nicht unendlich wird.

Wir bilden nun noch eine zweite Function, die durch Differentiation des Ausdruckes von P unter dem Integralzeichen entsteht. Es ist nämlich

$$r^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{(a - x)}{r^3} = \frac{\cos\alpha}{r^2}, \tag{4}$$

wenn α den Winkel bedeutet, den die von p nach $d\tau$ hin ge-

zogene Richtung r mit der positiven x-Axe bildet. Es ergiebt sich dann eine Function

(5) $$X = \int \varrho \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = \int \frac{dm \cos\alpha}{r^2},$$

und diese Function geht durch die Substitution (2) in

(6) $$X = \int \varrho \cos\alpha \, dr \, d\omega$$

über, woraus man schliesst, dass auch dieses Integral convergent ist.

Wenn wir nun die Function X in Bezug auf x zwischen den Grenzen x_0 und x integriren, während wir y und z constant lassen, so ergiebt sich, wenn wir die Integration unter den Integralzeichen ausführen:

$$\int_{x_0}^{x} X\, dx = \int \varrho \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) d\tau = P - P_0,$$

wenn P_0 den Werth von P für $x = x_0$ bedeutet, und daraus folgt wieder durch Differentiation

(7) $$X = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Die Grösse X hat folgende Bedeutung:

Wenn auf den Punkt p eine Kraft wirkt von der Intensität dm/r^2, die, wenn dm positiv ist, von p nach dem Elemente dm gerichtet ist, und wenn dm negativ ist, die entgegengesetzte Richtung hat, so kann diese Kraft angesehen werden als eine Anziehung oder Abstossung, die das Element dm auf den Punkt p ausübt, und das durch dm/r^2 ausgedrückte Wirkungsgesetz dieser Kraft ist das Newton'sche Gravitationsgesetz.

Die in der Richtung der positiven x-Axe genommene Componente dieser Kraft ist

$$dX = \frac{dm}{r^2} \cos\alpha,$$

und wenn nun eine ebensolche Kraft von sämmtlichen Elementen dm ausgeht, so ist der durch (3) gegebene Ausdruck von X die Gesammtcomponente der Wirkung des Körpers τ auf den Punkt p.

Dieselbe Betrachtung lässt sich aber in Bezug auf die y-Axe und die z-Axe anstellen, und es ergeben sich so die drei Componenten X, Y, Z der Wirkung des Körpers τ auf den Punkt p als die partiellen Ableitungen des Potentiales nach den drei Coordinaten x, y, z:

$$X = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{8}$$

Der Ausdruck

$$dP = X dx + Y dy + Z dz \tag{9}$$

ist ein vollständiges Differential.

Wenn auch noch Flächen σ vorkommen, die mit Massen oder mit einer Doppelschicht belegt sind, so wird in diesen Betrachtungen gar nichts geändert, wenn der Punkt p nicht gerade auf einer dieser Flächen liegt und wir erhalten die Componenten der Gesammtwirkung auf den Punkt p in der Form

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{10}$$

$$dV = X dx + Y dy + Z dz, \tag{11}$$

worin V die Bedeutung §. 99 (8) hat.

§. 102.

Stetigkeit der Functionen V, X, Y, Z.

1. **Die Functionen V, X, Y, Z sind stetige Functionen des Punktes p auch beim Durchgange durch eine Fläche, in der ϱ unstetig ist (aber nicht beim Durchgange durch die Fläche σ).**

Wir beweisen die Stetigkeit der Function V, indem wir bemerken, dass die Schlüsse unverändert auf die Functionen X, Y, Z anzuwenden sind.

Die Eigenschaft der Stetigkeit einer Function V besteht darin, dass die Schwankungen der Function V kleiner bleiben als eine beliebig kleine gegebene Grösse Δ, wenn die Verschiebungen des Punktes p kleiner sind als eine hinlänglich kleine Grösse δ. Dass V stetig ist, so lange der Punkt p ausserhalb des Integrationsgebietes τ liegt, folgt aus den allgemeinen Sätzen über Stetigkeit von Integralen als Functionen eines Para-

meters. Denn in diesem Falle ist die zu integrirende Function im ganzen Integrationsgebiete eine endliche und stetige Function der Lage von p.

Wenn aber p ein innerer Punkt ist, so nehmen wir ihn in endlicher Entfernung von der Fläche σ an und umgeben ihn mit einer Hülle, die etwa die Gestalt einer Kugel haben mag und die das Gebiet τ in zwei Theile τ^0 und τ^* theilt, wenn τ^0 der von der Kugelhülle umschlossene Raum, τ^* der übrigbleibende Theil von τ ist.

Liegt p in der Nähe der Oberfläche von τ, so wird die Hülle über das Gebiet hinausreichen können. Die hierdurch entstehenden Weitläufigkeiten können wir aber einfach durch die Bemerkung umgehen, dass wir den Raum τ beliebig ausdehnen können, wenn wir in den hinzugekommenen Theilen $\varrho = 0$ annehmen.

Die Function V zerfällt also jetzt in die beiden Bestandtheile V^0 und V^*, von denen der erste aus der Integration über τ^0, der zweite aus der über τ^* herrührt.

Wir nehmen nun die Hülle zunächst so klein an, dass V^0 in jedem Punkte in ihrem Inneren kleiner als $\frac{1}{2}\varDelta$ wird, was wegen der Convergenz des Integrals V immer möglich ist. Die Punkte im Inneren dieser Hülle sind aber für den Raum τ^1 äussere Punkte und folglich ist V^* eine stetige Function von p, so lange p in der Hülle bleibt, man kann also die Grenze δ für die Verschiebung von p so klein machen, dass die Schwankung von V^* kleiner als $\frac{1}{2}\varDelta$ wird, und dann ist also die Schwankung von V kleiner als $\varDelta$.

Da wir angenommen haben, dass der Körper τ und die Flächen σ ganz im Endlichen liegen, so sind V, X, Y, Z im Unendlichen gleich Null. Das Verschwinden lässt sich noch genauer so bestimmen:

2. Bedeutet R die Entfernung des Punktes p von einem festen Punkte, z. B. dem Coordinatenanfangspunkte, so sind die Producte

$$R\,V, \quad R^2 X, \quad R^2 Y, \quad R^2 Z$$

im Unendlichen endlich.

Dies ist aus den Ausdrücken für V, X, Y, Z durch Integrale ohne Weiteres zu ersehen.

§. 103.

Die Differentialquotienten von X, Y, Z.

Die auf einen äusseren Punkt p bezogenen Functionen X, Y, Z können nach den Coordinaten dieses Punktes beliebig oft differentiirt werden, indem man die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführt. Für einen äusseren Punkt haben diese Functionen also Differentialquotienten jeder Ordnung, die stetige Functionen des Ortes sind.

Für einen inneren Punkt kann aber schon die erste Differentiation von X, Y, Z nicht mehr durch Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, weil man auf diese Weise auf divergente Integrale geführt wird.

Zur Untersuchung des Differentialquotienten der Function

$$X = \int \frac{\varrho\,(a - x)\,d\tau}{r^3} \tag{1}$$

müssen wir also einen anderen Weg einschlagen, auf den uns Gauss gewiesen hat[1]).

Die Dichtigkeit ϱ soll zunächst als eine stetige differentiirbare Function des Ortes in dem Raume τ angenommen werden.

Fig. 43.

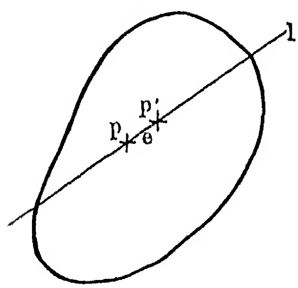
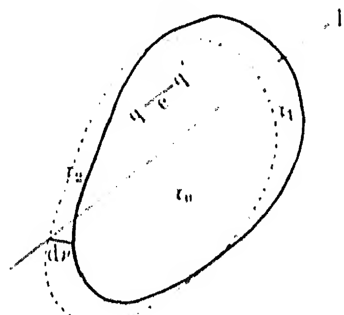


Fig. 44.



Wir geben dem Punkte p, der jetzt ein innerer sei, eine Verschiebung in einer beliebigen Richtung l von der Grösse e,

[1]) In der Abhandlung: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte.“ (Gauss' Werke, Bd. V. Auch in Ostwald's Classikern.)

die nicht so gross ist, dass sie ihn aus diesem Raumtheile herausführt, und bezeichnen den Werth von X für die neue Lage p' von p mit X'.

Denken wir uns aber den ganzen Raum τ mit seiner Masse in der Richtung l um e rückwärts geschoben, so kommt p' wieder mit p zur Deckung, und wenn wir den neuen Raum mit τ' bezeichnen, so kann X' auch dadurch gefunden werden, dass wir das Integral (1) für den Punkt p, aber über den Raum τ' nehmen.

Die Räume τ und τ' haben einen Theil τ_0 gemein; τ_1 sei der Theil des Raumes τ, der durch die Rückwärtsverschiebung frei wird, der also dem Raume τ allein angehört. Ebenso sei τ_2 der Theil des Raumes τ', der nicht in τ enthalten ist.

Wir deuten die Integrationsgebiete τ_0, τ_1, τ_2 dadurch an, dass wir für das Element $d\tau$ setzen $d\tau_0$, $d\tau_1$, $d\tau_2$.

Bezeichnet ϱ die Dichtigkeit in einem Punkte q und ϱ' die Dichtigkeit in dem Punkte q', der aus q durch Verschiebung um e in der Richtung l entsteht, beides in der ursprünglichen Lage des Körpers, so ist ϱ' in τ_1 und ϱ in τ_2 gleich Null zu setzen.

Hieraus ergiebt sich nach (1)

$$(2)\qquad \begin{aligned} X &= \int \frac{\varrho\,(a-x)\,d\tau_0}{r^3} + \int \frac{\varrho\,(a-x)\,d\tau_1}{r^3}, \\ X' &= \int \frac{\varrho'(a-x)\,d\tau_0}{r^3} + \int \frac{\varrho'(a-x)\,d\tau_2}{r^3}, \end{aligned}$$

und folglich

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{X'-X}{e} &= \int \frac{(\varrho'-\varrho)\,(a-x)}{e\,r^3}\,d\tau_0 \\ &\quad - \frac{1}{e}\int \frac{\varrho\,(a-x)}{r^3}\,d\tau_1 + \frac{1}{e}\int \frac{\varrho'\,(a-x)}{r^3}\,d\tau_2. \end{aligned}$$

Wenn nun e unendlich klein wird, so gehen die Räume τ_1 und τ_2 in Schichten über, die der Oberfläche O aufgelagert sind. Das Volumen des über dem Element do stehenden Theiles der Schicht τ_2 von der Dicke $d\nu$ ist, wenn $d\nu$ positiv nach innen gerechnet ist:

$$d\tau_2 = d o\, d\nu = e\, d o \cos(l, \nu),$$

und weil an der Grenze von τ_1 der Winkel (l, ν) stumpf ist:

$$d\tau_1 = -\, e\, d o \cos(l, \nu).$$

Es ist ferner

$$\lim \frac{X' - X}{e} = \frac{\partial X}{\partial l},$$

wobei so zu differentiiren ist, dass x, y, z als Functionen von l aufgefasst werden. Unter dem Integralzeichen in Bezug auf $d\tau_0$ ist aber ebenso

$$\lim \frac{\varrho' - \varrho}{e} = \frac{\partial \varrho}{\partial l},$$

wobei die Differentiation so zu verstehen ist, dass a, b, c als Functionen von l anzusehen sind.

Der Raum τ_0 fällt in der Grenze mit τ zusammen; τ_1 und τ_2 bedecken zusammen die ganze Oberfläche O und in τ_2 geht ϱ' in ϱ über. Wir erhalten also

$$(4) \qquad \frac{\partial X}{\partial l} = \int \frac{\partial \varrho}{\partial l} \frac{a - x}{r^3} d\tau + \int \frac{\varrho (a - x) \cos(l, \nu)\, d o}{r^3}.$$

Das nach $d\tau$ genommene Integral ist die x-Componente der Wirkung einer Massenvertheilung mit der Dichte $\partial \varrho / \partial l$, und das Integral nach $d o$ ist die x-Componente einer Oberflächenbelegung von der Flächendichte $\varrho \cos(l, \nu)$, und folglich ist $\partial X / \partial l$ eine stetige Function der Lage von p.

Dasselbe gilt aber auch noch, wenn ϱ nicht im ganzen Raume stetig ist, so lange sich nur p in einem Raumtheil verschiebt, in dem keine Unstetigkeit von ϱ liegt. Denn theilt man den Raum τ in zwei Theile τ' und τ'', so dass p in τ' liegt und ϱ in τ' stetig ist, so zerfällt X in zwei Theile $X' + X''$, und da p in Bezug auf τ'' ein äusserer Punkt ist, so hat X'' stetige Differentialquotienten jeder Ordnung.

Da nun die nämliche Betrachtung auf die Functionen Y, Z anwendbar ist, so haben wir den Satz:

3. Die Componenten X, Y, Z haben in einem Raumtheile, in dem die Dichtigkeit ϱ stetig und differentiirbar ist, in jeder Richtung l stetige Derivirte.

§. 104.

Bestimmung von ΔV und der Unstetigkeiten von V.

Von Wichtigkeit ist nun, wenn V ein Potential ist, die Kenntniss von ΔV und der Unstetigkeiten von V und seiner

Derivirten an den Flächen σ. Wenn die Function V in dem Punkte p mit den Coordinaten x, y, z durch das Integral

(1) $$V_p = \int \frac{\varrho\, d\tau}{r} + \int \frac{\varepsilon\, d\sigma}{r} + \int \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma$$

definirt wird, so können wir, wenn p ein äusserer Punkt ist, unter den Integralzeichen differentiiren, und wir erhalten

$$\Delta V_p = \int \varrho . \Delta \frac{1}{r}\, d\tau + \int \varepsilon . \Delta \frac{1}{r}\, d\sigma + \int \eta \frac{\partial \Delta \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

und da $\Delta \frac{1}{r} = 0$ ist, so folgt für einen äusseren Punkt

(2) $$\Delta V_p = 0.$$

Ist aber p ein innerer Punkt, so schneiden wir durch eine beliebige geschlossene Fläche aus dem Raume τ einen Theil τ^0 heraus, der den Punkt p und, möglicher Weise, auch einen Theil σ^0 der Fläche σ enthält. Den übrigen Theil des Raumes τ bezeichnen wir mit τ^*. Entsprechend den beiden Räumen τ^0 und τ^* zerfällt V_p in zwei Theile

(3) $$V_p = V_p^0 + V_p^*,$$

und wenn wir durch die Bezeichnung $d\tau^0$, $d\sigma^0$ andeuten, dass sich die Integration auf τ^0 und σ^0 erstrecken soll, so ist

(4) $$V_p^0 = \int \frac{\varrho\, d\tau^0}{r} + \int \frac{\varepsilon\, d\sigma^0}{r} + \int \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma^0.$$

Hierin kann p jeden beliebigen Punkt des unendlichen Raumes bedeuten. Entsprechend wird der zweite Bestandtheil von V_p definirt:

(5) $$V_p^* = \int \frac{\varrho\, d\tau^*}{r} + \int \frac{\varepsilon\, d\sigma^*}{r} + \int \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma^*.$$

Da der Punkt p im Inneren von τ^0 liegt, so ist er für den Raum τ^* ein äusserer Punkt, und die Function V_p^* genügt daher im Raume τ^0 der Differentialgleichung

(6) $$\Delta V_p^* = 0.$$

Aus demselben Grunde ist V^* im Inneren von τ^0 stetig, und wir haben daher an der Fläche σ^0

$$\left(\frac{\partial V^*}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V^*}{\partial \nu}\right)^- = 0, \tag{7}$$
$$(V^*)^+ - (V^*)^- = 0.$$

Wenn wir nun auf die Function V^0 die Formel §. 99 (4) anwenden, so ergiebt sich

$$4\pi V_p^0 = -\int \Delta V^0 \frac{d\tau^0}{r} - \int \left[\left(\frac{\partial V^0}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V^0}{\partial \nu}\right)^-\right] \frac{d\sigma^0}{r}$$
$$+ \int [(V^0)^+ - (V^0)^-] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma^0,$$

wofür man mit Rücksicht auf (6) und (7) auch setzen kann

$$4\pi V_p^0 = -\int \Delta V \frac{d\tau^0}{r} - \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^-\right] \frac{d\sigma^0}{r} \tag{8}$$
$$+ \int (V^+ - V^-) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma^0,$$

und wenn man aus (8) und (4) V_p^0 eliminirt, so folgt

$$\int (\Delta V + 4\pi\varrho) \frac{d\tau^0}{r} + \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^- + 4\pi\varepsilon\right] \frac{d\sigma^0}{r} \tag{9}$$
$$- \int (V^+ - V^- - 4\pi\eta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma^0 = 0,$$

und diese Formel gilt für jeden Punkt p im Inneren von τ^0, und sie gilt andererseits für jeden beliebigen, aus τ herausgeschnittenen Raumtheil τ^0. Nehmen wir zunächst den Raumtheil τ^0 so, dass er die Fläche σ ausschliesst, so fallen in (9) die Integrale in Bezug auf $d\sigma^0$ weg, und es folgt, dass in jedem Raumtheile ausserhalb dieser Flächen die Differentialgleichung

$$\Delta V = -4\pi\varrho \tag{10}$$

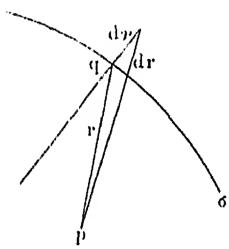
befriedigt sein muss, da, wenn $\Delta V + 4\pi\varrho$ in irgend einem Raumtheile nur positiv oder nur negativ wäre, die Bedingung (9) für diesen Raumtheil nicht befriedigt sein könnte.

Ebenso schliesst man, dass in jedem Theile σ^0 der Fläche σ

$$(11)\quad \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^- + 4\pi\varepsilon\right]\frac{1}{r} - (V^+ - V^- - 4\pi\eta)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \nu} = 0$$

sein muss. Es ist nun daran zu erinnern, dass r die Entfernung zweier Punkte p, q (mit den Coordinaten x, y, z und a, b, c) ist, dass in (11) q ein Punkt der Fläche σ^0 und p ein beliebiger Punkt in dem die Fläche σ^0 umgebenden Raume τ^0 ist.

Fig. 45.



Es ist aber

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \nu} = -\frac{\cos(r,\nu)}{r^2},$$

und folglich nach (11):

$$(12)\quad r\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^- + 4\pi\varepsilon\right] + (V^+ - V^- - 4\pi\eta)\cos(r,\nu) = 0.$$

Lässt man p auf der Verbindungslinie (p, q) fortrücken, so ändert sich r, nicht aber $\cos(r,\nu)$. Es ist also (12) nur befriedigt, wenn in jedem Flächentheile σ^0

$$(13)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^+ - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^- = -4\pi\varepsilon,$$

$$(14)\quad V^+ - V^- = 4\pi\eta,$$

und hierin können ϱ, ε, η beliebig gegebene Functionen sein.

Die Gleichung (10) wird die **Differentialgleichung von Laplace** genannt.

Zwölfter Abschnitt.

Beispiele zum Potential.

§ 105.

Das Problem des Potentials gegebener Massen.

Wir haben in §. 97, 2. nachgewiesen, dass eine Function V im ganzen unendlichen Raum eindeutig bestimmt ist durch folgende Bedingungen:

1. Es ist überall $\Delta V = -4\pi\varrho$, wenn ϱ eine gegebene stetige oder unstetige Function des Ortes ist.
2. An gewissen gegebenen Flächen σ ist V in der Weise unstetig, dass
$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^{-} = -4\pi\varepsilon, \quad V^{+} - V^{-} = 4\pi\eta,$$
wenn ε und η an den Flächen σ gegebene Functionen sind und ν die Normale der Fläche σ in einem beliebig angenommenen Sinne positiv gerechnet, bedeutet.
3. Abgesehen von den Flächen σ ist V überall stetig und hat stetige Derivirte.
4. Ist R die Entfernung des variablen Punktes, auf den sich V bezieht, von einem festen Punkte (dem Coordinatenanfangspunkte z. B.), so ist für $R = \infty$,
$$V = 0, \qquad R^2 \frac{\partial V}{\partial l} \quad \text{endlich},$$
wenn $\partial V / \partial l$ die Derivirte von V in einer beliebigen Richtung l bedeutet.

Es handelt sich also bei der Bestimmung von V um die Integration einer partiellen Differentialgleichung, für deren Lösung gewisse Stetigkeitsbedingungen vorgeschrieben sind.

Die Integration dieser Differentialgleichung ist aber durch die Formel §. 99 (8) allgemein und vollständig geleistet und es kann sich daher bei der Behandlung von besonderen Fällen nur noch darum handeln, die in jener Formel vorkommenden drei- und zweifachen Integrale zu vereinfachen. Dazu führt bisweilen, einfacher als die Umformung der Integrale, eine directe Integration der Differentialgleichung auf einem anderen Wege.

Wir geben hierfür einige Beispiele.

§. 106.

Potential einer homogenen Kugel.

Wir nehmen an, dass keine Unstetigkeitsflächen σ im Felde enthalten seien, und dass die räumliche Dichtigkeit ϱ nur eine Function der Entfernung r vom Coordinatenanfangspunkt sei, dass also die Masse in concentrischen homogenen Kugelschichten vertheilt sei.

Es folgt dann aus den Symmetrieverhältnissen, dass auch V nur eine Function von r sein kann.

Wenn wir daher den Ausdruck ΔV nach §. 42 (11) auf Polarcoordinaten transformiren, so ergiebt sich für V die Differentialgleichung

(1) $$\frac{1}{r}\frac{d^2 r V}{d r^2} = -4\pi\varrho.$$

Hieraus folgt durch einmalige Integration, wobei die Integrationsconstante dadurch bestimmt wird, dass $d(rV)/dr$ nach 4. für ein unendliches r verschwinden muss

$$\frac{d r V}{dr} = 4\pi\int_r^\infty r\varrho\, dr$$

und durch nochmalige Integration, da rV für $r = 0$ verschwinden muss

(2) $$V = \frac{4\pi}{r}\int_0^r dr\int_r^\infty r\varrho\, dr.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch partielle Integration umformen. Es ist nämlich

$$d\left(r\int_r^\infty r\varrho\,dr\right) = dr\int_r^\infty r\varrho\,dr - r^2\varrho\,dr$$

und daraus ergiebt sich durch Integration von 0 bis r

$$\int_0^r dr\int_r^\infty r\varrho\,dr = r\int_r^\infty r\varrho\,dr + \int_0^r r^2\varrho\,dr,$$

also

$$V = 4\pi\int_r^\infty r\varrho\,dr + \frac{4\pi}{r}\int_0^r r^2\varrho\,dr. \tag{3}$$

Nun ist $4\pi r^2\varrho\,dr$ die Masse dm einer unendlich dünnen Kugelschale vom Radius r, von der Dicke dr und der Dichtigkeit ϱ und wenn wir also mit m die Masse der ganzen Kugel mit dem Radius r bezeichnen, so ist

$$4\pi\int_0^r r^2\varrho\,dr = m.$$

Es wird also

$$V = \frac{m}{r} + \int_r^\infty \frac{dm}{r}. \tag{4}$$

Dieser Formel können wir folgenden Ausdruck geben. Nennen wir kurz innere Massen die, die dem Mittelpunkte näher sind als p, äussere die, die weiter entfernt sind, so können wir sagen:

> Das Potential einer concentrischen Massenvertheilung, bezogen auf einen Punkt p, ist gleich dem Potential der im Mittelpunkte vereinigten inneren Massen, vermehrt um das Potential der äusseren Massen im Mittelpunkte.

Nehmen wir an, es sei ϱ constant im Inneren einer Kugel vom Radius c, und $\varrho = 0$ ausserhalb dieser Kugel, so ergiebt uns die Formel (3) für einen inneren Punkt, weil darin die erste Integration jetzt nur bis c auszudehnen ist

$$(5) \qquad V_i = 2\pi\varrho\,(c^2 - r^2) + \frac{4\pi}{3}\,\varrho r^2 = 2\pi c^2\varrho - \frac{2\pi}{3}\,\varrho r^2.$$

Für einen äusseren Punkt fällt das erste Integral in (3) ganz weg und das zweite erhält die constante obere Grenze c. Folglich ergiebt sich für einen äusseren Punkt

$$(6) \qquad V_a = \frac{4\pi}{3}\,\varrho\,\frac{c^3}{r}.$$

Man sieht, dass für $r = c$ beide Ausdrücke denselben Werth $\frac{4}{3}\,\varrho\pi c^2$ erhalten.

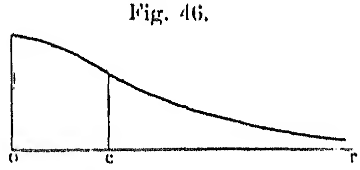
Die Ableitungen nach r sind

$$\frac{dV_i}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\,\varrho\,r, \qquad \frac{dV_a}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\,\varrho\,\frac{c^3}{r^2},$$

und geben für $r = c$ den übereinstimmenden Werth $-\frac{4}{3}\,\varrho\pi c$. Die zweiten Ableitungen aber geben für $r = c$ verschiedene Werthe. Wenn man V als Ordinate zu der Abscisse r aufträgt, so erhält man als Bild dieser Function V eine Curve, die sich aus einem Parabelbogen von $r = 0$ bis $r = c$ und einem hyperbelartigen Curvenstück dritter Ordnung von $r = c$ bis $r = \infty$ zusammensetzt, und beide Curvenstücke haben in dem Punkte $r = c$ dieselbe Tangente (Fig. 46).

Wenn der massenerfüllte Raum eine von zwei concentrischen Kugeln begrenzte homogene Schale ist, so haben wir dreierlei Räume zu unterscheiden, 1. den Hohlraum im Inneren der Schale, 2. den schalenförmigen Raum, 3. den äusseren Raum. Wir wollen das Potential für diese drei Räume mit V_1, V_2, V_3 bezeichnen, und mit c_1, c_2 die Radien der inneren und der äusseren Kugel.

Fig. 46.



Man erhält die gesuchten Potentiale, wenn man die nach (5) und (6) für die beiden Kugeln gebildeten Ausdrücke von einander subtrahirt, und dabei beachtet, dass der Hohlraum für beide Kugeln ein innerer, die Schale für die eine Kugel ein innerer, für die andere ein äusserer, und endlich der Raum ausserhalb der Schale für beide Kugeln ein äusserer ist. So findet man

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
V_1 &= 2\pi\varrho\,(c_2^2 - c_1^2), \\
V_2 &= 2\pi\varrho\,c_2^2 - \frac{2\pi\varrho}{3}\,r^2 - \frac{4\pi\varrho}{3}\,\frac{c_1^3}{r}, \\
V_3 &= \frac{4\pi\varrho}{3}\,\frac{c_2^3 - c_1^3}{r}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir hierin $c_2 - c_1$ unendlich klein werden lassen und $\varrho\,(c_2 - c_1) = \varepsilon$ setzen, so ergeben uns V_1, V_3 die Potentiale einer Flächenbelegung auf der Kugel. V_1 bezieht sich auf den Innenraum und V_3 auf den Aussenraum. Man erhält, wenn man dann $c_1 = c_2 = c$ setzt

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
V_1 &= 4\pi c\,\varepsilon, \\
V_3 &= \frac{4\pi c^2\varepsilon}{r}.
\end{aligned}
$$

Für $r = c$ stimmen beide Ausdrücke überein, dagegen haben die Differentialquotienten

$$
(9) \qquad \frac{dV_1}{dr} = 0, \qquad \frac{dV_3}{dr} = -\frac{4\pi c^2\varepsilon}{r^2}
$$

die Differenz $-4\pi\varepsilon$.

Hieraus können wir endlich noch das Potential einer kugelförmigen Doppelschicht ableiten.

Wir denken uns also wieder zwei Kugelflächen mit den Radien c_1, c_2, auf denen gleiche und entgegengesetzte Massen flächenartig ausgebreitet sind. Die Dichtigkeiten müssen also im umgekehrten Verhältniss der Flächen, oder was dasselbe ist, der Quadrate der Radien stehen. Ist also die Dichtigkeit auf der ersten Kugel $-\varepsilon$, so ist sie auf der zweiten $\varepsilon\,c_1^2/c_2^2$. Wir erhalten also das Potential nach (8)

$$
V_1 = -\frac{4\pi\varepsilon\,c_1\,(c_2 - c_1)}{c_2}, \quad V_3 = 0
$$

und wenn also nun $c_1 = c_2 = c$ und $\varepsilon\,(c_2 - c_1) = \eta$ wird:

$$
V_1 = -4\pi\eta, \qquad V_3 = 0.
$$

Es ist also der Unterschied $V_3 - V_1 = 4\pi\eta$, wie es sein muss. V_1 und V_3 sind hier constant und folglich ihre Ableitungen überall $= 0$.

§. 107.

Potential eines Ellipsoids.

Das dreifache Integral, durch welches das Potential eines mit homogener Masse erfüllten Ellipsoids ausgedrückt ist, lässt sich auf ein einfaches elliptisches Integral zurückführen. Es giebt eine grosse Zahl von Lösungen dieses sowohl durch seine mathematischen Schwierigkeiten, als durch seine mannigfachen Anwendungen berühmten Problems[1]). Dirichlet hat zuerst darauf hingewiesen, dass man auf sehr einfache Weise zwar nicht zu einer Ableitung, wohl aber zu einem vollständigen Beweis des Resultates gelangen kann, wenn man an dem bekannten Ausdruck die charakteristischen Eigenschaften des Potentials (§. 105) nachweist. Diesen Weg wollen wir hier, als den kürzesten, einschlagen.

Es seien a, b, c die Halbaxen des Ellipsoids, und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

seine auf die Hauptaxen bezogene Gleichung. Wir betrachten daneben noch die durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \tag{2}$$

dargestellte Flächenschaar, die, wenn λ durch positive Werthe von 0 bis ∞ geht, eine Schaar die gegebene Fläche umschliessender confocaler Ellipsoide darstellt. Ist λ negativ, so stellt (2) entweder ein inneres Ellipsoid oder ein Hyperboloid dar. Betrachten wir den Punkt p mit den Coordinaten x, y, z als gegeben, so ist (2) eine cubische Gleichung für λ, und diese hat dann und nur dann eine positive Wurzel, wenn x, y, z ein äusserer Punkt zu der Fläche (1) ist. Diese positive Wurzel, die wir hinfort unter λ verstehen wollen, ist dann vermöge (2) eine Function von x, y, z. Wenn der Punkt p auf die gegebene Fläche rückt, so geht λ in Null über.

---

[1]) Die wichtigsten Abhandlungen über diesen Gegenstand sind in Ostwald's „Classikern der exacten Wissenschaften“, Nr. 19, zusammengestellt.

Wir beweisen nun, dass, wenn ϱ die constante Dichtigkeit im Inneren des Ellipsoids bedeutet, die Function

$$(3) \qquad V_i = \pi \varrho \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{D}$$

für einen inneren Punkt,

$$(4) \qquad V_a = \pi \varrho \int\limits_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{D}$$

für einen äusseren Punkt, wenn D die Bedeutung hat

$$(5) \qquad D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)},$$

den charakteristischen Bedingungen §. 105, 1., 2., 3., 4. genügt. Um dies nachzuweisen, bilden wir zunächst die Ableitung nach x:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial x} &= -2\pi\varrho \int\limits_0^\infty \frac{x}{a^2 + s} \frac{ds}{D}, \\ \frac{\partial V_a}{\partial x} &= -2\pi\varrho \int\limits_\lambda^\infty \frac{x}{a^2 + s} \frac{ds}{D}, \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass V_a auch in Bezug auf die untere Grenze λ differentiirt werden muss, dass aber das hiervon herrührende Glied wegen der Gleichung (2) wegfällt. Wenn der Punkt p an die Oberfläche rückt, so wird $\lambda = 0$ und es wird $V_a = V_i$ und $\partial V_a / \partial x = \partial V_i / \partial x$. Ebenso sind an allen anderen Stellen V und $\partial V / \partial x$ stetige Functionen von p. Demnach genügt unsere Annahme den Bedingungen 3.

Ist a die kleinste, b die grösste unter den Halbaxen des Ellipsoids, und

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so ist nach (2)

$$(7) \qquad a^2 + \lambda < r^2 < b^2 + \lambda,$$

und folglich wird λ mit r zugleich unendlich; ausserdem ist

$$D > \frac{(a^2 + s)^{3/2}}{abc},$$

und wenn $s > \lambda$ ist

$$0 < 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s} < 1.$$

Daraus folgt

$$V_a < \varrho\, \pi\, a\, b\, c \int\limits_\lambda^\infty \frac{d\,s}{(a^2+s)^{3/2}} = \varrho\, \frac{2\,\pi\, a\, b\, c}{\sqrt{a^2+\lambda}},$$

und da z dem absoluten Werthe nach kleiner als r ist, so ist dem absoluten Werthe nach

$$r^2\, \frac{\partial\, V_a}{\partial\, x} < 2\pi\, a\, b\, c\, \varrho\, r^3 \int\limits_\lambda^\infty \frac{d\,s}{(a^2+s)^{5/2}} = \frac{4\pi}{3}\, \frac{a\, b\, c\, \varrho\, r^3}{\sqrt{(a^2+\lambda)^3}},$$

und mit Rücksicht auf (7)

$$\text{(8)} \qquad r^2\, \frac{\partial\, V_a}{\partial\, x} < \frac{4\pi}{3}\, a\, b\, c\, \varrho\, \sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda}}^{\,3},$$

was für $\lambda = \infty$ endlich bleibt. Da man hierin x mit y und mit z vertauschen kann, so ist auch die Bedingung 4 befriedigt, und weil hier keine Flächen σ vorhanden sind, so bleibt nur noch die Differentialgleichung in 1., §. 105, nachzuweisen.

Zu diesem Zwecke bilden wir aus (6)

$$\frac{\partial^2\, V_i}{\partial\, x^2} = -\, 2\, \pi\, \varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\,s}{(a^2+s)\, D},$$

woraus

$$\varDelta\, V_i = -\, 2\, \pi\, \varrho \int\limits_0^\infty \frac{d\,s}{D} \left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right).$$

Es ist aber

$$\text{(9)} \qquad \frac{d \log D}{d\,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right),$$

also

$$\text{(10)} \qquad \varDelta\, V_i = -\, 4\, \pi\, \varrho \int\limits_1^\infty \frac{d\, D}{D^2} = -\, 4\, \pi\, \varrho.$$

Für einen äusseren Punkt erhalten wir, wenn wir den Werth von D für $s = \lambda$ mit D_1 bezeichnen:

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial^2\, V_a}{\partial\, x^2} = -\, 2\, \pi\, \varrho \int\limits_\lambda^\infty \frac{d\,s}{(a^2+s)\, D} + \frac{2\, \pi\, \varrho\, x}{(a^2+\lambda)\, D_1}\, \frac{\partial\, \lambda}{\partial\, x}$$

und daraus, wenn man die entsprechenden Ausdrücke für die Differentiation nach y und z bildet:

$$\Delta V_a = -2\pi\varrho \int_\lambda^\infty \frac{ds}{D}\left(\frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right)$$

$$+ \frac{2\pi\varrho}{D_1}\left(\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right),$$

darin lässt sich das Integral mit Hülfe der Formel (9) ausführen, und man erhält:

$$(12)\quad \Delta V_a = \frac{2\pi\varrho}{D_1}\left(\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z} - 2\right).$$

Andererseits ergiebt sich durch Differentiation der die Function λ definirenden Gleichung (2):

$$(13)\quad \begin{aligned}
\frac{2x}{a^2+\lambda} &= \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial x} \quad\Bigg\|\quad \frac{x}{a^2+\lambda}, \\
\frac{2y}{b^2+\lambda} &= \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial y} \quad\Bigg\|\quad \frac{y}{b^2+\lambda}, \\
\frac{2z}{c^2+\lambda} &= \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right]\frac{\partial\lambda}{\partial z} \quad\Bigg\|\quad \frac{z}{c^2+\lambda},
\end{aligned}$$

woraus, wenn man mit den rechts stehenden Factoren multiplicirt, addirt, und einen gemeinschaftlichen Factor abwirft:

$$(14)\quad \frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 2$$

und hiernach erhält man aus (12)

$$(15)\quad \Delta V_a = 0.$$

Damit ist nachgewiesen, dass die durch (3) und (4) gegebene Function V_i und V_a die charakteristischen Eigenschaften des Potentials hat, und dass sie also das Potential eines homogenen dreiaxigen Ellipsoides wirklich darstellt.

§. 108.

Ellipsoidische Schale.

Nachdem das Potential eines homogenen Ellipsoides gefunden ist, können wir leicht das Potential einer von zwei Ellipsoiden begrenzten Schale berechnen. Man hat nur das Potential des inneren Ellipsoides von dem des äusseren abzuziehen.

Wir betrachten hier den besonderen Fall, dass die beiden Ellipsoide ähnlich und ähnlich gelegen sind, und es mögen,

wenn a^2, b^2, c^2 die Quadrate der Halbaxen des inneren Ellipsoides sind, die des äusseren mit

$$a_1^2 = a^2(1+\delta),\quad b_1^2 = b^2(1+\delta),\quad c_1^2 = c^2(1+\delta)$$

bezeichnet sein. Lassen wir dann δ unendlich klein werden, so erhalten wir eine Flächenbelegung, die aber nicht über die ganze Oberfläche constant, sondern mit dem unendlich kleinen Normalabstand der beiden Flächen proportional ist. Wir bezeichnen, wie bei der Kugelschale, mit V_1 das Potential für einen Punkt im Hohlraum, mit V_2 für einen Punkt zwischen beiden Flächen, und mit V_3 für einen äusseren Punkt. Wir wollen nur V_1 und V_3 genauer betrachten, da die Punkte der Schale selbst für den Grenzfall ohne Interesse sind. Wird das Potential für das innere Ellipsoid mit V, für das äussere mit V' bezeichnet, so ist

(4) $$V_1 = V_i' - V_i,\qquad V_3 = V_a' - V_a.$$

Wir haben nun nach §. 107 (3)

$$V_i' = \pi\varrho\int_0^\infty\left(1 - \frac{x^2}{a^2(1+\delta)+s} - \frac{y^2}{b^2(1+\delta)+s} - \frac{z^2}{c^2(1+\delta)+s}\right)\frac{ds}{D'},$$

wenn D' aus D hervorgeht durch die Vertauschung von a, b, c mit a_1, b_1, c_1. Wenn man darin $s = (1+\delta)\,s'$ setzt, und dann den Accent bei s' wieder weglässt, so kommt

(5) $$V_i' = \pi\varrho\int_0^\infty\left(1+\delta - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

und folglich

(6) $$V_1 = \pi\varrho\delta\int_0^\infty\frac{ds}{D},$$

woraus das merkwürdige Resultat folgt, dass das Potential V_1 von x, y, z unabhängig ist.

Um V_3 zu bilden, haben wir die Formel §. 107 (4) anzuwenden. In dem Ausdruck für V_a' ist die untere Grenze λ' die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2(1+\delta)+\lambda'} + \frac{y^2}{b^2(1+\delta)+\lambda'} + \frac{z^2}{c^2(1+\delta)+\lambda'} = 1,$$

und wenn wir also hier auch $s = (1+\delta)\,s'$ setzen, so wird für s' die untere Grenze $\lambda'' = \lambda'/(1+\delta)$, und λ'' ist die posi-

tive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda''}+\frac{y^2}{b^2+\lambda''}+\frac{z^2}{c^2+\lambda''}=1+\delta.$$

Es ist dann

$$V_a'=\pi\varrho\int_{\lambda''}^{\infty}\left(1+\delta-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

und folglich

$$(7)\qquad V_3=\pi\varrho\int_{\lambda''}^{\lambda}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{D}$$

$$+\pi\varrho\delta\int_{\lambda''}^{\infty}\frac{ds}{D}.$$

Wir lassen jetzt, um zur Flächenbelegung überzugehen, δ unendlich klein und ϱ unendlich gross werden, jedoch so, dass $\varrho\delta$ einen endlichen Werth behält. Dann wird in dem Ausdruck (7) der erste Theil unendlich klein, weil nicht nur die beiden Grenzen zusammenfallen, sondern auch noch der Differentialquotient nach λ'' für $\delta=0$ verschwindet [wegen der Gleichung §. 107 (2)] und es ergiebt sich

$$(8)\qquad V_3=\pi\varrho\delta\int_{\lambda}^{\infty}\frac{ds}{D},$$

während der Ausdruck (6) für V_1 auch für den Fall eines verschwindenden δ noch gilt. Man sieht, dass die Functionen V_1 und V_3 an der Oberfläche stetig in einander übergehen.

Die Flächendichtigkeit ι können wir entweder in der oben angedeuteten Weise geometrisch bestimmen, oder auch nach der Formel §. 104 (13)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)^{1}-\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)=-4\pi\iota.$$

Ziehen wir durch die Fläche des Ellipsoides im Punkte x, y, z eine Normale ν, nach aussen positiv, so ist $V=V_1$, also constant und $(\partial V/\partial\nu)=0$. Ferner $V'=V_3$ und daher

$$\frac{\partial V_3}{\partial \nu}=-4\pi\iota.$$

Bilden wir diesen Ausdruck nach der Formel (8), in der nach der Differentiation $\lambda=0$, also $D=1$ zu setzen ist, weil

der Differentialquotient für einen Punkt der Oberfläche zu nehmen ist, so folgt:

$$(9) \qquad \varepsilon = \frac{\varrho\,\delta}{4}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\cos(\nu, y) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\cos(\nu, z)\right].$$

Es ist aber nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie

$$\cos(\nu, x) = \frac{x}{a^2\psi}, \quad \cos(\nu, y) = \frac{y}{b^2\psi}, \quad \cos(\nu, z) = \frac{z}{c^2\psi},$$

worin zur Abkürzung

$$(10) \qquad \psi = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

gesetzt ist, und es ist daher nach §. 107 (14)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cos(\nu, x) + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\cos(\nu, y) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\cos(\nu, z) = \frac{2}{\psi},$$

und die Flächendichtigkeit nach (9)

$$(11) \qquad \varepsilon = \frac{\varrho\,\delta}{2\,\psi}.$$

In den Scheiteln des Ellipsoides wird z. B. die Dichtigkeit

$$\frac{\varrho\,\delta}{2}\,a, \qquad \frac{\varrho\,\delta}{2}\,b, \qquad \frac{\varrho\,\delta}{2}\,c.$$

Der Werth von $\varrho\,\delta$ lässt sich einfach durch die gesammte in der ellipsoidischen Schale enthaltene Masse m darstellen. Es ist nämlich die Masse des inneren Ellipsoides

$$\frac{4\pi}{3}\,a\,b\,c\,\varrho$$

und die des äusseren

$$\frac{4\pi}{3}\,a\,b\,c\,\varrho\,\sqrt{1+\delta}^{\,3} = \frac{4\pi}{3}\,a\,b\,c\,\varrho\left(1 + \frac{3}{2}\,\delta\right)$$

für ein unendlich kleines δ. Folglich ist die Masse der Schale

$$m = 2\pi\,a\,b\,c\,\varrho\,\delta$$

und daraus

$$\varepsilon = \frac{m}{4\pi\,a\,b\,c\,\psi}.$$

Dreizehnter Abschnitt.

Kugelfunctionen.

§. 109.

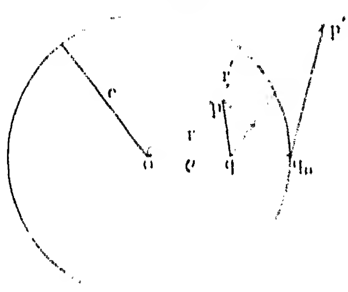
Die Green'sche Function für eine Kugel.

Wir haben in §. 97 eine Green'sche Function G als eine Function von zwei Punkten p, q im Inneren eines begrenzten Raumes τ definirt, die, als Function von q betrachtet, innerhalb τ der Differentialgleichung

$$\Delta G = 0 \tag{1}$$

genügt, und an der Oberfläche O des Raumes τ verschwindet; ausserdem sollte die Function $G + 1 : (pq)$, wenn (pq) die Entfernung der beiden Punkte p und q ist, nebst ihren Ableitungen in τ stetig sein.

Fig. 47.



Wenn die Green'sche Function bekannt war, so konnten wir, wie wir gesehen haben, die Differentialgleichung $\Delta V = 0$ für den Raum τ unter der Voraussetzung lösen, dass die Function V an der Oberfläche O von τ beliebig gegeben war. Wir wollen nun die Function G für den Fall bestimmen, dass der Raum τ durch eine Kugelfläche mit dem Radius c begrenzt ist.

Dazu führt eine sehr einfache elementar-geometrische Betrachtung, wenn wir uns daran erinnern, dass nach §. 96 der reciproke Werth irgend zweier Punkte als Function des einen von ihnen immer der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt.

Es sei p ein Punkt innerhalb der Kugel, im Abstand r vom Kugelmittelpunkt. Zu jedem Punkte p kann man einen bestimmten zugehörigen äusseren Punkt p' finden, der auf demselben Radius in der Entfernung r' vom Mittelpunkte liegt, und so, dass c die mittlere Proportionale zwischen r und r' ist, dass also

$$rr' = c^2. \tag{2}$$

Dieser Punkt p' heisst der harmonische Pol von p. Man kann ihn leicht aus dem Satze construiren, dass p in der Ebene des Kreises liegt, in dem der von p' auslaufende Tangentenkegel die Kugel berührt. Der Punkt q möge auf einem Radius, der mit r den Winkel γ bildet, in der Entfernung ϱ vom Mittelpunkte liegen. Rückt der Punkt q auf demselben Radius fortschreitend auf die Kugelfläche nach q_0, so werden die beiden Dreiecke $(o\,q_0\,p)$ und $(o\,p'\,q_0)$ einander ähnlich; denn sie haben denselben Winkel γ, und es ist wegen (2)

$$(o\,p) : (o\,q_0) = (o\,q_0) : (o\,p').$$

Hieraus folgt also auch

$$(p'\,q_0) : (p\,q_0) = (o\,q_0) : (o\,p) = c : r,$$

also

$$\frac{1}{(p\,q_0)} = \frac{c}{r\,(p'\,q_0)}. \tag{3}$$

Wenn q variabel ist, und p und folglich auch p' fest, so bleibt r ungeändert, und wenn wir daher

$$G = \frac{c}{r}\,\frac{1}{(p'\,q)} - \frac{1}{(p\,q)} \tag{4}$$

setzen, so bleibt diese Function, da p' ein äusserer, q ein innerer Punkt ist, im Inneren der Kugel mit Ausnahme des Punktes p endlich und stetig, und sie hat wegen (3) alle charakteristischen Eigenschaften der Green'schen Function.

Derselbe Ausdruck giebt uns auch die Green'sche Function für den Aussenraum der Kugel, wenn p und q äussere Punkte sind und p' im Inneren liegt.

§. 110.

Bestimmung eines Potentials in einer Kugel bei gegebenen Oberflächenwerthen.

Die jetzt bestimmte Green'sche Function wenden wir nun zur Lösung der Aufgabe an, eine Function V zu bestimmen, die

im Innern der Kugel mit ihren Derivirten stetig ist und der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, und die an der Oberfläche in eine dort gegebene Ortsfunction Φ übergeht. Diese Aufgabe wird jetzt gelöst durch die Formel §. 97 (2), in der wir für G die Function (4) des vorigen Paragraphen und für r die Entfernung der Punkte p, q zu setzen haben. Bezeichnen wir mit ϱ den Abstand des Punktes q vom Kugelmittelpunkte, so fällt die nach innen gerichtete Normale n mit der Richtung der abnehmenden ϱ zusammen, und die angeführte Formel giebt

$$(1) \qquad 4\pi V_p = \int \Phi \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{c}{r}\frac{1}{(p'q)} - \frac{1}{(pq)}\right] do.$$

Darin ist do ein Oberflächenelement der Kugel, und Φ ist der Werth dieser Function in einem Punkte dieses Elementes. In dem nach ϱ differentiirten Ausdruck ist nach der Differentiation $\varrho = c$ zu setzen.

Es ist aber, wenn der Winkel zwischen r und ϱ mit γ bezeichnet wird,

$$(2) \qquad \begin{aligned} (pq) &= \sqrt{r^2 - 2r\varrho\cos\gamma + \varrho^2}, \\ (p'q) &= \sqrt{r'^2 - 2r'\varrho\cos\gamma + \varrho^2} \end{aligned}$$

und folglich

$$(3) \qquad \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\frac{c}{r}\frac{1}{(p'q)} - \frac{1}{(pq)}\right] = \frac{c}{r}\frac{r'\cos\gamma - \varrho}{(p'q)^3} - \frac{r\cos\gamma - \varrho}{(pq)^3}.$$

Gehen wir mit diesem Ausdruck an die Oberfläche, so wird $\varrho = c$ und $(p'q) = \frac{c}{r}(pq)$ [§. 109 (3)], so dass sich für den Ausdruck (3) wegen $rr' = c^2$ ergiebt

$$\frac{1}{(pq)^3}\left[\frac{r^2}{c^2}(r'\cos\gamma - c) - r\cos\gamma + c\right] = \frac{c^2 - r^2}{c\,(pq)^3}.$$

Demnach folgt aus (1)

$$(4) \qquad 4\pi c V_p = \int \Phi \frac{(c^2 - r^2)\, do}{\sqrt{c^2 - 2cr\cos\gamma + r^2}^{\,3}}$$

oder, wenn wir zur Vereinfachung $c = 1$ setzen:

$$(5) \qquad 4\pi V_p = \int \Phi \frac{(1 - r^2)\, do}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}^{\,3}}$$

Man sieht es diesem Ausdruck nicht auf den ersten Blick an, dass, wenn p auf seinem Radius in den Oberflächenpunkt p_0

rückt, V_p den Werth Φ_0 annimmt, den Φ in dem Punkte p_0 hat. Denn es hat der Ausdruck den für $r = 1$ verschwindenden Factor $1 - r^2$, während andererseits das Integral für $r = 1$ unendlich wird.

Um diesen Punkt aufzuklären, legen wir die Axe eines Polarcoordinatensystems auf der Kugelfläche durch den Punkt p, so dass p_0 der Nordpol wird. Es ist dann γ das Complement der geographischen Breite, und wenn ψ die geographische Länge ist, so wird

$$d o = \sin \gamma \, d \gamma \, d \psi.$$

Der Ausdruck (5) ergiebt dann

$$(6) \qquad 4 \pi V_p = (1 - r^2) \int_0^{2\pi} d \psi \int_0^{\pi} \Phi \frac{\sin \gamma \, d \gamma}{\sqrt{1 - 2 r \cos \gamma + r^2}^3},$$

wir setzen

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \, d \psi = \Theta,$$

so dass Θ eine Function von γ allein ist, die das arithmetische Mittel der Werthe von Φ auf einem Parallelkreis ist. Dann wird (6)

$$(8) \qquad V_p = \frac{1 - r^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{\Theta \sin \gamma \, d \gamma}{\sqrt{1 - 2 r \cos \gamma + r^2}^3}.$$

Um den Grenzwerth dieses Ausdrucks für $r = 1$ zu ermitteln, nehmen wir einen beliebigen Winkel η zwischen 0 und π und setzen

$$(9) \qquad V_p = \frac{1 - r^2}{2} \int_0^{\eta} \frac{\Theta \sin \gamma \, d \gamma}{\sqrt{1 - 2 r \cos \gamma + r^2}^3}$$

$$+ \frac{1 - r^2}{2} \int_{\eta}^{\pi} \frac{\Theta \sin \gamma \, d \gamma}{\sqrt{1 - 2 r \cos \gamma + r^2}^3},$$

und hier verschwindet nun der zweite Theil für $r = 1$, weil die Function $1 - 2 r \cos \gamma + r^2$ für $r = 1$ und $\eta \leqq \gamma \leqq \pi$ nicht verschwindet. Es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung des Grenzwerthes des ersten Theiles. Ist aber Θ_0 ein Mittelwerth der Function Θ in dem Intervall $0 \leqq \gamma \leqq \eta$, so ist

nach dem Mittelwerthsatz

$$(10)\quad \int\limits_0^\eta \frac{\Theta \sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}^{\,3}} = \Theta_0 \int\limits_0^\eta \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}^{\,3}},$$

und es ist das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}^{\,3}} = -\frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}};$$

setzen wir also die Grenzen ein, so wird das Integral (10)

$$\frac{1}{r}\,\Theta_0\left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\eta+r^2}}\right).$$

Wenn wir also die Glieder, die für $r = 1$ verschwinden, weglassen, so ergiebt sich aus (9)

$$V_p = \frac{1+r}{2r}\,\Theta_0,$$

was für $r = 1$ in Θ_0 übergeht. Da nun aber η beliebig klein angenommen werden kann, so ist, wenigstens wenn Θ für $\gamma = 0$ als stetig vorausgesetzt wird, Θ_0 nichts anderes als der Werth von Θ im Punkte p_0, und aus (7) geht hervor, dass, wenn Φ im Punkte p_0 stetig in einen bestimmten Werth Φ_0 übergeht, $\Phi_0 = \Theta_0$ ist. Das war die Forderung, der die Function V_p genügen sollte. Unsere Analyse giebt uns aber noch etwas Weiteres: sie zeigt, dass, wenn die Function Φ im Punkte p_0 nicht stetig in einen bestimmten Werth übergeht, wenn also ihr Grenzwerth abhängig ist von der Richtung, in der man in den Punkt p_0 hineingeht, dann die Function V_p auf dem nach p_0 führenden Radius in den Mittelwerth aller um p_0 herum stattfindenden Functionswerthe Φ übergeht.

§. 111.

Potential im Aussenraum einer Kugel.

Man kann auf demselben Wege die Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ finden für den Aussenraum einer Kugel, wenn die Werthe von V auf der Oberfläche gegeben sind, und noch die Bedingung hinzukommt, dass V im Unendlichen verschwinden soll. Man gelangt zur Lösung dieser Aufgabe aber noch ein-

facher durch Benutzung eines allgemeinen Satzes, der auch für manche andere Anwendungen nützlich ist, und der sich unmittelbar aus einer besonderen Form der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0$$

ableiten lässt. Wenn wir nämlich den Ausdruck ΔV nach §. 42 (11) auf Polarcoordinaten r, ϑ, φ transformiren und

$$(1) \qquad \sqrt{r}\, V = U, \qquad \log r = \lambda$$

setzen, so erhält die Gleichung $\Delta V = 0$ die Form

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} - \frac{1}{4}\, U + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = 0,$$

und diese Gleichung bleibt ungeändert, wenn λ in $-\lambda$ oder, was dasselbe ist, r in $1/r$ verwandelt wird.

Statt $1/r$ kann man auch c^2/r setzen, wenn c eine beliebige Constante ist.

Wenn also

$$(3) \qquad V = F(r, \vartheta, \psi)$$

eine Lösung der Gleichung $\Delta V = 0$ ist, so erhält man daraus eine zweite

$$(4) \qquad V' = \frac{c}{r}\, F\left(\frac{c^2}{r}, \vartheta, \psi\right),$$

und wenn die erste dieser Functionen für $r = 0$ endlich bleibt, so wird die zweite für $r = \infty$ verschwindend klein.

Wir haben oben zwei Punkte, die auf demselben Radius vector liegen und vom Nullpunkt die Abstände r und c^2/r haben, harmonische Pole in Bezug auf die Kugel mit dem Radius c genannt. Lässt man jeden Punkt seinem harmonischen Pole entsprechen, so erhält man eine Abbildung des Raumes auf sich selbst, bei der dem Inneren der Kugel das Aeussere entspricht und umgekehrt. Man nennt dies die Abbildung durch reciproke Radien. Wendet man dies Verfahren auf die Formel (4) des vorigen Paragraphen an, so erhält man eine Function

$$(5) \qquad 4\pi c\, V_p = \int \Phi \frac{(r^2 - c^2)\, do}{\sqrt{r^2 - 2rc\cos\gamma + c^2}^3},$$

worin do ein Element der Kugelfläche mit dem Radius c,

r der Abstand des Punktes vom Kugelmittelpunkt, γ der Winkel zwischen den Radienvectoren nach p und nach do und Φ eine an der Kugelfläche willkürlich gegebene Function ist. Diese Function V, als Function von p betrachtet, genügt der Differentialgleichung $\Delta V = 0$, ist im ganzen Aussenraum der Kugel endlich und stetig und im Unendlichen verschwindend klein und nimmt an der Oberfläche der Kugel den Werth Φ an, wobei in Unstetigkeitsstellen der Function Φ der Grenzwerth für $r = a$ nach der Vorschrift des letzten Paragraphen zu definiren ist.

§. 112.

Die einfachen Kugelfunctionen.

Wenn man die Function V für einen inneren Punkt, die in §. 110 (5) durch ein Integral über die Kugeloberfläche dargestellt ist, in eine Reihe nach steigenden Potenzen von r entwickeln will, ist es zunächst erforderlich, die Grösse

$$(1) \qquad R = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}}$$

nach steigenden Potenzen von r zu entwickeln, was gestattet ist, so lange $r < 1$ ist. Wir setzen diese Entwickelung mit unbestimmten Coëfficienten in der Form an:

$$(2) \qquad R = P_0 + rP_1 + r^2P_2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n.$$

Hierin sind die Coëfficienten P_n oder $P_n(\cos\gamma)$ ganze rationale Functionen von $\cos\gamma$, auf deren Bildungsgesetz wir zurückkommen. Sie werden Kugelfunctionen und zwar $P_n(\cos\gamma)$ die Kugelfunction n^{ter} Ordnung genannt.

Zum Unterschiede von den gleich zu erwähnenden allgemeinen Kugelfunctionen heissen sie auch einfache Kugelfunctionen.

Um hieraus die Entwickelung von V selbst zu erhalten, bilden wir zunächst aus (1) und (2) durch Differentiation nach r:

$$\frac{2r\cos\gamma - 2r^2}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}^{\,3}} = \sum_{n=0}^{\infty} 2nr^n P_n(\cos\gamma).$$

und daraus durch Addition von R

$$\frac{1-r^2}{\sqrt{1-2r\cos\gamma+r^2}^{\,3}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,r^n P_n(\cos\gamma).$$

Hiernach ergiebt sich nach §. 110 (5)

$$(3)\qquad 4\pi V_p = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,r^n\int \Phi_q P_n(\cos\gamma)\,do.$$

Hierin bedeutet, um daran zu erinnern, r den Abstand des Punktes p vom Kugelmittelpunkte o, q einen Punkt des Elementes do der Kugelfläche, γ den Winkel $(p\,o\,q)$ und Φ_q den Werth der Function Φ im Punkte q.

Zur Vereinfachung des Ausdrucks wollen wir festsetzen, dass in einem Punkte q, in dem Φ unstetig ist, unter Φ_q der im §. 110 definirte Mittelwerth aller um q stattfindenden Werthe von Φ zu verstehen sei.

Wenn wir den Punkt p auf dem Radius r in die Kugelfläche hineinrücken lassen, so geht, wie wir gesehen haben, die durch §. 110 (5) definirte Function V_p in Φ_p über. Machen wir denselben Grenzübergang auf der rechten Seite von (3), so folgt

$$(4)\qquad 4\pi\Phi_p = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\int \Phi_q P_n(\cos\gamma)\,do.$$

Die Richtigkeit dieser Formel würde aus dem Abel'schen Satze (§. 25) folgen, wenn die Convergenz der Reihe feststünde. Diese ist unter gewissen, sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Function Φ von Dirichlet bewiesen [1]. Für die Anwendung auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik genügt aber die durch die Betrachtungen des §. 110 bewiesene Formel

$$(5)\qquad 4\pi\Phi_p = \lim_{r=1}\sum_{0,\infty}^{n}(2n+1)\,r^n\int \Phi_q P_n(\cos\gamma)\,do,$$

wobei es auf die Convergenz der Reihe an der Grenze $r=1$ nicht weiter ankommt.

[1] Dirichlet's Werke, Bd. I., S. 283.

§. 113.

Die allgemeinen Kugelfunctionen.

Die Coëfficienten der Entwickelung (4) der Function V_p, also die Functionen

$$(1) \qquad Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int \Phi_q P_n(\cos\gamma)\, do_q,$$

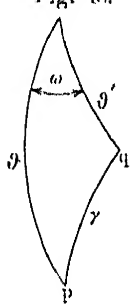
heissen die **allgemeinen Kugelfunctionen**. Es sind Functionen der Coordinaten eines Punktes auf der Einheitskugel, nämlich des Punktes, in dem der Radius r diese Kugelflächen trifft.

Wenn wir der Einfachheit wegen jetzt den Index p weglassen, so ergiebt sich aus §. 112 (3)

$$(2) \qquad V = \sum r^n Y^{(n)}.$$

Um die Bildung von $Y^{(n)}$ deutlicher zu übersehen, führen wir Polarcoordinaten mit beliebigem Pol und Anfangsmeridian ein. Ist ϑ der Polabstand und φ die geographische Länge, so seien r, φ, ϑ die Polarcoordinaten des Punktes p und 1, φ', ϑ' die von q. Nach einer Formel der sphärischen Trigonometrie ist

Fig. 48.



$$(3) \qquad \cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\omega$$

$$(4) \qquad \omega = \varphi - \varphi'.$$

Ferner

$$do = \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$$

und folglich

$$(5) \qquad Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \Phi(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\gamma) \sin\vartheta'\, d\vartheta'.$$

Da P_n, wie schon erwähnt, eine ganze rationale Function von $\cos\gamma$ ist, so wird $Y^{(n)}$ nach (3) eine ganze rationale Function von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$. Von der willkürlichen Function Φ hängen in $Y^{(n)}$ nur die Coëfficienten dieser Function, also eine gewisse Anzahl willkürlicher Constanten ab.

Die durch die Formel (2) ausgedrückte Function V genügt

der Differentialgleichung $\Delta V = 0$, und wenn wir ΔV nach §. 42 (11) auf Polarcoordinaten transformiren, so erhalten wir für V die Differentialgleichung:

$$(6) \qquad r\frac{\partial^2 r V}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial V}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Setzen wir hierin den Ausdruck (2) und setzen in der so entstehenden Entwickelung die Coëfficienten der einzelnen Potenzen von r gleich Null, so ergiebt sich für $Y^{(n)}$ die partielle Differentialgleichung:

$$(7) \qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial Y^{(n)}}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\, Y^{(n)} = 0,$$

oder, wenn man für ϑ die Variable $x = \cos\vartheta$ einführt:

$$(8) \qquad \frac{\partial (1-x^2)\dfrac{\partial Y^{(n)}}{\partial x}}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 Y^{(n)}}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\, Y^{(n)} = 0.$$

Da die Function $R = (1 - 2r\cos\gamma + r^2)^{-\frac{1}{2}}$ als Function von r, ϑ, φ gleichfalls der Differentialgleichung $\Delta R = 0$ genügt, so erhält man für die Entwickelungscoëfficienten dieser Function, d. h. für die Functionen $P_n(\cos\gamma)$, dieselbe Differentialgleichung:

$$(9) \qquad \frac{\partial (1-x^2)\dfrac{\partial P_n(\cos\gamma)}{\partial x}}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 P_n(\cos\gamma)}{\partial\varphi^2} + n(n+1)\, P_n(\cos\gamma) = 0.$$

Setzt man darin $\vartheta' = 0$, so wird $\cos\gamma = \cos\vartheta = x$ und $P_n(\cos\gamma)$ geht in die Function $P_n(x)$ über, die von φ unabhängig ist. Die Differentialgleichung (9) bleibt aber auch dann noch richtig und giebt eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $P_n(x)$

$$(10) \qquad \frac{d(1-x^2)\dfrac{dP_n}{dx}}{dx} + n(n+1)\, P_n = 0,$$

oder auch

$$(11) \qquad (1-x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)\, P_n = 0.$$

§. 114.

Darstellung der einfachen Kugelfunctionen.

Am einfachsten erhält man den Ausdruck für die Kugelfunctionen P_n, wenn man in

$$(1)\qquad R = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}}$$

den binomischen Lehrsatz anwendet. Nach diesem Satze ist nämlich

$$(2)\qquad (1-\alpha)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,\alpha + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\alpha^2 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\alpha^3 + \cdots,$$

wofür auch gesetzt werden kann

$$(3)\qquad (1-\alpha)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Pi(2h)}{2^{2h}\,\Pi(h)^2}\,\alpha^h.$$

Wir setzen jetzt in (1) $\cos\gamma = x$ und in (3)

$$\alpha = 2rx - r^2$$

$$\alpha^h = \sum_{k=0}^{h} (-1)^k \frac{\Pi(h)}{\Pi(k)\,\Pi(h-k)}\,(2x)^{h-k}\,r^{h+k},$$

dann wird

$$(4)\qquad R = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{h} (-1)^k \frac{\Pi(2h)}{2^{h+k}\,\Pi(h)\,\Pi(k)\,\Pi(h-k)}\,r^{h+k}\,x^{h-k},$$

und um die Functionen P_n zu finden, hat man diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von r zu ordnen. Wir setzen

$$h + k = n, \qquad h - k = n - 2k,$$

und haben für ein festgehaltenes n für k alle der Bedingung

$$0 \leqq k \leqq \frac{n}{2}$$

genügenden ganzen Zahlen zu setzen. Dann ergiebt sich aus (4)

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum^{k} (-1)^k \frac{\Pi(2n-2k)}{2^n\,\Pi(n-k)\,\Pi(n-2k)\,\Pi(k)}\,x^{n-2k},$$

und aus §. 112 (2) erhält man

$$(5)\qquad P_n = \sum^{k} (-1)^k \frac{\Pi(2n-2k)}{2^n\,\Pi(n-k)\,\Pi(n-2k)\,\Pi(k)}\,x^{n-2k}.$$

ein Ausdruck, der, ausführlicher geschrieben, so lautet:

$$(6) \qquad P_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n} \times$$

$$\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \cdots\right\}.$$

Es ist also P_n eine ganze rationale Function n^{ten} Grades von x, die entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen von x enthält. Es ist beispielsweise

$$P_0 = 1,$$
$$P_1 = x,$$
$$P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2},$$
$$P_3 = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x,$$
$$P_4 = \frac{35}{8} x^4 - \frac{15}{4} x^2 + \frac{3}{8},$$
$$P_5 = \frac{63}{8} x^5 - \frac{35}{4} x^3 + \frac{15}{8} x.$$

§. 115.

Darstellung der allgemeinen Kugelfunctionen.

Um die Entwickelungscoëfficienten $Y^{(n)}$ in der Function V [§. 113 (2)] in definitiver Form zu erhalten, haben wir in der Function $P_n(\cos\gamma)$, die in §. 113 (5) vorkommt, die Variablen $\vartheta, \vartheta', \varphi, \varphi'$ von einander zu trennen. Es ist darin zu setzen

$$(1) \quad \cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega, \quad \omega = \varphi - \varphi'.$$

Da $P_n(\cos\gamma)$ eine ganze Function n^{ten} Grades ist, so können wir sie nach den Potenzen

$$(\sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\omega)^\nu, \quad \nu = 0, 1, \ldots n$$

ordnen, und die Coëfficienten dieser Darstellung sind ganze Functionen von $\cos\vartheta$, $\cos\vartheta'$.

Wenn wir uns ferner der Formeln §. 66 erinnern, nach denen $\cos^\nu\omega$ dargestellt wird durch

$$\cos\nu\omega, \quad \cos(\nu-2)\omega, \quad \cos(\nu-4)\omega, \ldots$$

so sehen wir, dass sich $P_n(\cos\gamma)$ auch ordnen lässt nach den Functionen

$$\sin^\nu\vartheta \sin^\nu\vartheta' \cos\nu\omega, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots n$$

und also in der Form darstellbar ist:

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{0,\,n}^{\nu} U_n^{(\nu)} \sin^\nu\vartheta \sin^\nu\vartheta' \cos\nu\omega, \tag{2}$$

worin die Coëfficienten $U_n^{(\nu)}$ ganze rationale Functionen von $\cos\vartheta$, $\cos\vartheta'$ sind, die sich überdies nicht ändern, wenn $\cos\vartheta$ mit $\cos\vartheta'$ vertauscht wird.

Zur Bestimmung dieser Coëfficienten führt uns nun die Differentialgleichung §. 113 (9). Setzt man nämlich in diese Differentialgleichung den Ausdruck (2) ein, so erhält man eine Summe, die nach $\cos\nu\omega$ geordnet erscheint, und in der jeder einzelne Coëfficient verschwinden muss. Es kommt dies darauf hinaus, dass man in dieser Differentialgleichung $P_n(\cos\gamma)$ durch einen Ausdruck von der Form

$$(1 - x^2)^{\frac{\nu}{2}} U_n^{(\nu)} \cos\nu\omega$$

ersetzt, worin U, da ϑ' als constant gilt, nur von $x = \cos\vartheta$ abhängig ist. Führt man die einfache Rechnung durch, so ergiebt sich für $U_n^{(\nu)}$ als Function der Variablen x die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1 - x^2)\frac{d^2 U_n^{(\nu)}}{dx^2} - 2(\nu + 1)x\frac{dU_n^{(\nu)}}{dx} \tag{3}$$
$$+ [n(n+1) - \nu(\nu+1)]\, U_n^{(\nu)} = 0$$

und $U_n^{(\nu)}$ ist eine solche particulare Lösung dieser Gleichung, die zugleich eine ganze rationale Function von x ist.

Die Gleichung (3) kann aber nur eine solche Lösung haben.

Denn bezeichnen wir für den Augenblick mit v_1, v_2 die beiden particularen Lösungen dieser Gleichung, so lässt sich die allgemeine Formel §. 62 (13) anwenden, in der wir

$$a = -\frac{2(\nu + 1)x}{1 - x^2} = \frac{d\log(1 - x^2)^{\nu+1}}{dx}$$

zu setzen haben, so dass sich

$$v_1 \frac{d v_2}{d x} - v_2 \frac{d v_1}{d x} = \frac{C}{(1 - x^2)^{\nu+1}}$$

ergiebt. Es können also nicht v_1 und v_2 ganze Functionen von x sein. Bezeichnen wir daher die ganze rationale Lösung von (3), nachdem wir einen constanten Factor einstweilen noch willkürlich bestimmen, mit $P_n^{(\nu)}(x)$, so unterscheidet sich $U_n^{(\nu)}$ von $P_n^{(\nu)}$ nur durch einen von x unabhängigen Factor. Da aber $U_n^{(\nu)}$ ungeändert bleiben muss, wenn $\cos\vartheta$ mit $\cos\vartheta'$ vertauscht wird, so ist, wenn $\cos\vartheta' = y$ gesetzt wird:

$$U_n^{(\nu)} = a_\nu P_n^{(\nu)}(x)\, P_n^{(\nu)}(y),$$

und a_ν ist ein numerischer Factor.

Für $\nu = 0$ geht (3) in die Differentialgleichung §. 113 (11) über, deren ganze rationale Lösung $P_n(x)$ ist. Wir setzen also

$$P_n^{(0)} = P_n(x). \tag{4}$$

Wenn wir ferner die Gleichung (3) nach x differentiiren, so folgt

$$(1 - x^2) \frac{d^3 U_n^{(\nu)}}{d x^3} - 2(\nu + 2)\, x \frac{d^2 U_n^{(\nu)}}{d x^2}$$

$$+ [n(n+1) - (\nu + 1)(\nu + 2)] \frac{d U_n^{(\nu)}}{d x} = 0$$

und dieselbe Gleichung erhält man, wenn man in (3) ν durch $\nu + 1$ und $U_n^{(\nu)}$ durch $d\, U_n^{(\nu)}/dx$ ersetzt. Hiernach können wir setzen

$$P_n^{(\nu)} = \frac{d P_n^{(\nu-1)}}{d x} \tag{5}$$

und nach (4) also allgemein

$$P_n^{(\nu)} = \frac{d^\nu P_n(x)}{d x^\nu}. \tag{6}$$

Danach ergiebt sich, wenn

$$\cos\gamma = x y + \sqrt{1 - x^2}\, \sqrt{1 - y^2} \cos\omega$$

gesetzt ist, nach (3):

(7) $$P_n(\cos\gamma) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_n^{(\nu)}(x) P_n^{(\nu)}(y) \sqrt{1-x^2}^{\,\nu} \sqrt{1-y^2}^{\,\nu} \cos\nu\omega,$$

worin noch die numerischen Coëfficienten a_ν zu bestimmen sind. Um diese Bestimmung auszuführen, setzen wir zunächst $x = y$, also

$$\cos\gamma = x^2 + (1-x^2)\cos\omega = \cos\omega + 2x^2\sin^2\frac{\omega}{2}$$

(8) $$P_n(\cos\gamma) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_n^{(\nu)}(x)^2 (1-x^2)^\nu \cos\nu\omega$$

und vergleichen in dieser, in Bezug auf x identischen Gleichung die Coëfficienten der höchsten, nämlich der $2n^{\text{ten}}$ Potenz von x. Diese ist nach §. 114 (6) auf der linken Seite

(9) $$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n}\, 2^n \left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n} = \frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)^2}\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n},$$

und auf der rechten Seite [durch ν-malige Differentiation von §. 114 (6)]

(10) $$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu \left[\frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-\nu)}\right]^2 \cos\nu\omega.$$

Ferner ist

$$\left(2\sin\frac{\omega}{2}\right)^{2n} = (-1)^n\left(e^{\frac{\omega i}{2}} - e^{-\frac{\omega i}{2}}\right)^{2n} =$$

$$\frac{\Pi(2n)}{\Pi(n)^2} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \frac{2\,\Pi(2n)}{\Pi(n+\nu)\,\Pi(n-\nu)} \cos\nu\omega,$$

und die Vergleichung von (9) mit (10) ergiebt

(11) $$a_\nu = \frac{2\,\Pi(n-\nu)}{\Pi(n+\nu)} = \frac{2}{(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n+\nu)},$$
$$a_0 = 1.$$

Hiernach lässt sich der vollständig entwickelte Ausdruck für die allgemeine Kugelfunction $Y^{(n)}$ [§. 113 (1)] bilden. Setzt man noch in (7)

$$\cos\nu\omega = \cos\nu(\varphi-\varphi') = \cos\nu\varphi\cos\nu\varphi' + \sin\nu\varphi\sin\nu\varphi',$$

so erhält man nach §. 113 (5)

(12) $$Y^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \left(A_n^{(\nu)}\cos\nu\varphi + B_n^{(\nu)}\sin\nu\varphi\right) P_n^{(\nu)}(\cos\vartheta)\sin\vartheta^\nu$$

und dieser Ausdruck enthält, da $B_n^{(0)}$ wegfällt, $2n+1$ willkürliche Constanten $A_n^{(\nu)}$, $B_n^{(\nu)}$. Durch die auf der Kugelfläche gegebene Function Φ werden diese Constanten als bestimmte Integrale über die Kugeloberfläche ausgedrückt und erhalten, da man jetzt bei den Integrationsvariablen die Accente weglassen kann, den Ausdruck

$$(13)\quad \begin{aligned} &(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n+\nu)\,A_n^{(\nu)} \\ &= \frac{2n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\nu\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\Phi(\vartheta,\varphi)\,P_n^{(\nu)}(\cos\vartheta)\sin^{\nu+1}\vartheta\,d\vartheta \\ &(n-\nu+1)(n-\nu+2)\ldots(n+\nu)\,B_n^{(\nu)} \\ &= \frac{2n+1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\nu\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\Phi(\vartheta,\varphi)\,P_n^{(\nu)}(\cos\vartheta)\sin^{\nu+1}\vartheta\,d\vartheta, \end{aligned}$$

worin jedoch der Ausdruck für $A_n^{(0)}$ noch durch 2 zu dividiren ist.

Durch die unendliche Reihe

$$(14)\qquad V = \sum_{n}^{\infty}{}_{0}\, r^n\, Y^{(n)},\quad r < 1$$

ist dann die partielle Differentialgleichung $\varDelta V = 0$ für das Innere der Einheitskugel vollständig integrirt, und zwar so, dass V an der Oberfläche in den Werth $\Phi(\vartheta,\varphi)$ übergeht. Mit denselben Mitteln und unter denselben Voraussetzungen kann man aber auch die Differentialgleichung für das äussere der Kugel integriren, und erhält den Ausdruck

$$(15)\qquad V = \frac{1}{r}\sum r^{-n}\, Y^{(n)},\qquad r > 1,$$

der für $r = 1$ gleichfalls in die Function Φ übergeht, und der ausserdem noch im Unendlichen der Bedingung §. 102 (2) genügt.

§. 116.

Die Differentialgleichung der Kugelfunctionen.

Wenn wir in der Differentialgleichung §. 113 (7), der die Kugelfunctionen Y genügen,

$$(1)\qquad n(n+1) = a$$

setzen, so erhalten wir eine partielle Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial Y}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + a\,Y = 0,$$

und wir wollen nun diese Differentialgleichung, unabhängig von ihrer Entstehung, für einen beliebigen reellen Werth der Constanten a betrachten. Ist a gegeben, so erhält man n aus der quadratischen Gleichung (1), natürlich im Allgemeinen nicht als ganze Zahl, und es wird n imaginär, wenn $a < -\frac{1}{4}$ ist, dagegen reell, wenn $a > -\frac{1}{4}$, also sicher, wenn a positiv ist, und dann ist die eine Wurzel n von (1) positiv, die andere $-n-1$ negativ. Die Variablen ϑ und φ betrachten wir als Polarcoordinaten auf der Einheitskugel und weisen nun den folgenden allgemeinen Satz nach:

Die Differentialgleichung (2) hat nur dann eine von Null verschiedene Lösung, die auf der ganzen Kugelfläche mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig ist, wenn die Gleichung (1) durch ein ganzzahliges n befriedigt wird.

Zum Beweise nehmen wir an, die Differentialgleichung (2) habe eine Lösung Y, die auf den Kugelflächen mit ihren Derivirten endlich und stetig ist.

Diese Function muss in Bezug auf φ die Periode 2π haben, und da sie für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ von φ unabhängig sein muss, so ist

$$\frac{\partial Y}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = 0,\ \vartheta = \pi.$$

Um zunächst negative Werthe von a, und damit imaginäre n, auszuschliessen, multipliciren wir die Gleichung (2) mit $Y \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ und integriren über die ganze Kugelfläche. Mit Benutzung der identischen Formeln:

$$Y\,\frac{\partial \sin\vartheta \dfrac{\partial Y}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} = \frac{\partial \sin\vartheta\, Y \dfrac{\partial Y}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} - \sin\vartheta \left(\frac{\partial Y}{\partial\vartheta}\right)^2,$$

$$Y\,\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial\, Y \dfrac{\partial Y}{\partial\varphi}}{\partial\varphi} - \left(\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right)^2$$

erhält man dann:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)^2 - a Y^2\right] \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0,$$

und diese Gleichung ist bei negativem a und von Null verschiedenem Y offenbar unmöglich.

Ist a positiv und folglich n reell, so setzen wir

$$(3) \qquad Q = \int_{-\pi}^{+\pi} Y\, d\varphi.$$

Es ist dann Q nur noch eine Function von ϑ, und aus (2) erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d \sin\vartheta \frac{dQ}{d\vartheta}}{d\vartheta} + a\, Q = 0,$$

oder, wenn man $\cos\vartheta = x$ setzt und für a den Werth (1) einführt,

$$(4) \qquad \frac{d(1-x^2)\frac{dQ}{dx}}{dx} + n(n+1)\, Q = 0,$$

also die Differentialgleichung der einfachen Kugelfunctionen [§. 113 (10)], nur mit dem Unterschiede, dass n, was wir immer positiv annehmen können, jetzt nicht nothwendig eine ganze Zahl ist.

Wir erhalten leicht durch die Methode der unbestimmten Coëfficienten zwei particulare Integrale von (4) in Gestalt zweier Potenzreihen nach x, von denen die eine nur gerade, die andere nur ungerade Potenzen enthält:

$$(5) \qquad Q_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^{2\nu}, \qquad Q_2 = x \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu x^{2\nu},$$

und für A_ν und B_ν erhält man, wenn man diese Ausdrücke in (4) einsetzt, die Recursionsformeln:

$$A_\nu = A_{\nu-1}\,\frac{(2\nu - n - 2)(2\nu + n - 1)}{2\nu(2\nu - 1)},$$

$$B_\nu = B_{\nu-1}\,\frac{(2\nu - n)(2\nu + n + 1)}{2\nu(2\nu + 1)},$$

also, wenn man $A_0 = B_0 = 1$ annimmt,

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
A_\nu &= \frac{\left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{2}+1\right)\cdots\left(-\frac{n}{2}+\nu-1\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{n+1}{2}+\nu-1\right)}{1\,.\,2\ldots\nu\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+\nu-1\right)}\\
B_\nu &= \frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}+\nu\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}+1\right)\cdots\left(-\frac{n-1}{2}+\nu-1\right)}{1\,.\,2\ldots\nu\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{3}{2}+\nu-1\right)}
\end{aligned}
$$

Hiernach lassen sich die Functionen Q_1, Q_2 durch hypergeometrische Reihen darstellen.

Gauss hat nämlich in der Abhandlung „Disquisitiones generales circa seriem infinitam ...“ [1]) eine unendliche Reihe untersucht:

$$
(7)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\,.\,\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots,
$$

die für alle positiven Werthe von x, die kleiner als 1 sind (abgesehen von dem Falle eines negativen ganzzahligen γ), convergent ist, und die man die hypergeometrische Reihe nennt. In dem besonderen Falle, wo α oder β eine negative ganze Zahl ist, bricht die Reihe ab, und F geht in eine ganze rationale Function von x über.

Nach (5) und (6) lassen sich die Functionen Q_1, Q_2 durch diese Function F in folgender Weise ausdrücken:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
Q_1 &= F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right),\\
Q_2 &= x\,F\left(\frac{n}{2}+1, -\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),
\end{aligned}
$$

so dass also, wenn n eine gerade ganze Zahl ist, Q_1, wenn n eine ungerade ganze Zahl ist, Q_2 eine ganze rationale Function ist, die bis auf einen numerischen Factor mit der Kugelfunction P_n übereinstimmt. Ist aber n keine ganze Zahl, so laufen beide Reihen ins Unendliche. Nun hat Gauss in der erwähnten Abhandlung nachgewiesen, dass die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ unendlich wird, wenn $\alpha + \beta - \gamma$ positiv oder Null ist, ausser in dem Falle, wo α oder β eine negative ganze Zahl ist [2]), und

---

[1]) Werke, Bd. 3, S. 125.

[2]) Die Wiedergabe dieses Beweises, der keine grossen Schwierigkeiten hat, würde uns hier zu weit führen. Wir verweisen auf die dritte Section der angeführten Abhandlung (Werke, Bd. 3, S. 138).

dies tritt, wie man sieht, in den beiden Reihen Q_1, Q_2, wie sie durch (8) dargestellt sind, ein, wo

$$\alpha + \beta - \gamma = -\frac{n}{2} + \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{in } Q_1,$$
$$= \frac{n}{2} + 1 - \frac{n-1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{in } Q_2.$$

Hieraus also geht hervor, dass Q und folglich auch Y für $x^2 = 1$, d. h. in den Polen der Kugel nur dann endlich sein kann, wenn n eine ganze Zahl ist, und damit ist das Theorem bewiesen.

Wir haben hier ein Beispiel eines Verhaltens, das uns in Anwendungen, besonders auf Schwingungsprobleme, noch mehrfach begegnen wird, dass die Möglichkeit, einer Differentialgleichung mit gewissen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen zu genügen, von dem Werthe eines Parameters der Differentialgleichung (wie hier α) abhängt.

Ein noch einfacheres, ganz elementares Beispiel bietet die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + ay = 0,$$

die nur dann eine von Null verschiedene, in dem ganzen Intervalle (0,1) stetige Lösung hat, die an den Grenzen dieses Intervalles verschwindet, nämlich $y = \sin \sqrt{a}\, x$, wenn a/π^2 das Quadrat einer ganzen Zahl ist.

In diesen Fällen sind wir in der Lage, die geeigneten Werthe des Parameters, die in unendlicher Zahl vorhanden sind, von vornherein zu bestimmen. Im Allgemeinen aber werden diese Werthe durch transcendente Gleichungen bestimmt, die man erst aufstellen kann, wenn das allgemeine Integral seiner Form nach bekannt ist.

Vierzehnter Abschnitt.

Ueberblick über die Grundsätze der Mechanik.

§. 117.

Die Grundlagen der Mechanik.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Vorstellung einer Kraft abgeleitet ist aus dem Gefühle der Anstrengung, das wir beim Heben einer Last oder der Ueberwindung irgend eines Widerstandes empfinden, und dass die grössere oder kleinere Anstrengung, die wir dabei empfinden, das erste und natürliche Maass der Kraft ist. Es ist auch nicht anders mit anderen in unseren physikalischen Theorien auftretenden Begriffen, z. B. der Temperatur, der Lichtintensität etc. Indem man nun an Stelle dieses unbestimmten Maasses, was uns unser Muskelgefühl giebt, das stets gleich bleibende Gewicht bestimmter Körper setzte, erhielt man die Grundlage für eine mathematische Mechanik, wie sie schon im Alterthum begründet wurde (Archimedes), und der man dieselbe Evidenz und Sicherheit zuschreiben darf, wie etwa der Euklidischen Geometrie. Dies ist die geometrische Statik, als deren erstes und letztes Beispiel der Beweis des Hebelgesetzes von Archimedes und der Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten von Lagrange angeführt werden kann.

Hierbei muss die Aufgabe rein statisch gefasst, d. h. es darf nur nach den Bedingungen gefragt werden, unter denen ein gegebenes System von Gewichten die Ruhelage nicht verlässt. Was eintritt, wenn diese Bedingungen nicht erfullt sind, darüber giebt diese Theorie keinen Aufschluss. Um auch diesen zu gewinnen, wird es nicht ohne eine neue Annahme abgehen.

und diese gründet sich auf die Erfahrung, dass die Anstrengung, die zur Veränderung einer vorhandenen Geschwindigkeit aufgewandt werden muss, vergleichbar ist mit der, durch die eine Last in der Schwebe gehalten wird. Am Ende einer längeren historischen Entwickelung, die sich auf besondere Fälle bezog, ist endlich in dem d'Alembert'schen Princip dieser Zusammenhang durch ein allgemeines Gesetz hergestellt worden.

Indem nun diese Gesetze, die aus den einfachen Vorgängen, die uns die Schwere an der Erdoberfläche täglich bietet, abgeleitet sind, hypothetisch auf alle Vorgänge der Natur übertragen werden, gelangt man zu dem Gebäude der analytischen Mechanik, die unserer ganzen theoretischen Naturwissenschaft zu Grunde liegt, und die sich bisher in allen Anwendungen aufs Beste bewährt hat.

Wir stellen im Folgenden die Hauptsätze, die in der mathematischen Physik von Bedeutung sind, zusammen, müssen aber dabei die analytischen Entwickelungen gänzlich übergehen, die der Leser in den Lehrbüchern der Mechanik findet.

§. 118.

Das Princip der virtuellen Verrückungen.

Es handelt sich zunächst um das Gleichgewicht eines Systems von materiellen Punkten (in endlicher Anzahl), die in ihrer Beweglichkeit irgend wie beschränkt sein können. Unter diesen Beschränkungen haben wir Folgendes zu verstehen. Es seien $m_1, m_2, m_3 \ldots$ die Punkte des Systems. Jedem dieser Punkte geben wir eine unendlich kleine Verschiebung $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3 \ldots$ von irgend einer Grösse und Richtung. Wenn das System nicht vollkommen frei ist, so sind nicht alle Verschiebungssysteme möglich, sondern es bestehen zwischen diesen $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3, \ldots$ nach Richtung und Grösse gewisse Abhängigkeiten. Ein Verschiebungssystem, was eben diesen Systembedingungen genügt, heisst ein System virtueller Verschiebungen oder Verrückungen[1]).

[1]) Wenn man das System aus der ursprünglichen Lage in einer unendlich kleinen Zeit in die verschobene übergehen lässt, so erhält jeder Punkt eine gewisse Geschwindigkeit, die nach Richtung und Grösse durch die Verrückung dargestellt wird. Die älteren Autoren sprechen daher von dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten (Lagrange, méc. analytique).

Um die Bedingungen des Systems analytisch darzustellen, muss man es auf ein Coordinatensystem beziehen. Es seien also x_i, y_i, z_i die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes m_i und $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ die Projectionen von δp_i. Die Bedingungen des Systems sind dann linear in Bezug auf $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ und haben die Form

$$(1) \qquad \sum^{i} (A_i \delta x_i + B_i \delta y_i + C_i \delta z_i) = 0\ ^{1)}.$$

Solcher Bedingungen können wir mehrere haben. Ihre Anzahl muss aber, soweit sie von einander unabhängig sind, kleiner als die dreifache Zahl der Massenpunkte m_i sein, damit überhaupt noch eine Beweglichkeit übrig bleibt.

Wenn die ursprüngliche Lage des Systems gegeben ist, so sind die Coëfficienten A_i, B_i, C_i gegebene Constanten. In allen Anwendungen aber sind die Bedingungen durch das gegebene System bestimmt, d. h. es sind die Coëfficienten A_i, B_i, C_i Functionen der Coordinaten der Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Es ist darum aber noch nicht nothwendig, dass sich diese Bedingungen selbst durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ausdrücken lassen, mit anderen Worten, es ist nicht nothwendig, dass die linken Seiten der Gleichungen (1) vollständige Differentiale seien, oder sich auch nur durch Combination auf vollständige Differentiale reduciren lassen.

Der gewöhnliche Fall ist allerdings der, dass die Systembedingungen durch Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0, \ldots$ zwischen den Coordinaten der Punkte ausgedrückt sind, und dass sich die Bedingungen (1) durch Differentiation dieser Gleichungen, also in der Form

$$(2) \qquad \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \text{ etc.}$$

darstellen lassen [2]).

---

[1]) Wir lassen hier den Fall bei Seite, dass diese Bedingungen in Ungleichungen bestehen, dass also Bewegungen, die in einem Sinne möglich sind, im entgegengesetzten Sinne nicht möglich sind, ebenso solche Fälle, in denen die Bedingungen für die Verrückungen nicht durch lineare Gleichungen ausdrückbar sind, z. B. wenn ein Punkt gezwungen ist, auf einer Kegelfläche zu bleiben, in deren Spitze er sich gerade befindet.

[2]) Ein Fall, in dem dies nicht zutrifft, ist z. B. der, in dem die Bedingung ausgedrückt werden soll, dass eine Kugel auf einer Unterlage ohne Gleiten rollen muss. Vgl. Hölder, Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis. Göttinger Nachrichten 1896.

Es handelt sich nun um die Bedingung des Gleichgewichts des Systems der Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots$, wenn auf die Punkte gewisse Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ wirken.

Wenn man dem Punkte m_i eine der Kraft P_i entgegengesetzte Verschiebung ertheilen will, so muss der Widerstand der Kraft P_i überwunden, d. h. es muss Arbeit gegen die Kraft P_i geleistet werden. Die Grösse dieser Arbeit ist gleich dem Product aus der Kraft und der Verschiebung in der der Kraft entgegengesetzten Richtung, d. h. wenn δp_i die ganze Verschiebung ist, die mit der Kraftrichtung P_i den Winkel ϑ_i bildet

$$- P_i \delta p_i \cos \vartheta_i.$$

Geschieht die Verschiebung in der Richtung der Kraft selbst, so ist diese Arbeit negativ, d. h. es wird nicht Arbeit aufgewandt, sondern gewonnen. Demnach heisst auch $P_i \delta p_i \cos \vartheta_i$ die von der Kraft P_i während der Verschiebung δp_i ihres Angriffspunktes geleistete Arbeit. Die Summe

$$A = - \Sigma P_i \delta p_i \cos \vartheta_i \tag{3}$$

heisst die gesammte Arbeit, die gegen das Kraftsystem P_i zur Erzeugung der virtuellen Verschiebung δp_i aufgewendet werden muss, und das Princip der virtuellen Verrückungen besagt nun:

> Befindet sich ein irgend wie bedingtes System im Gleichgewicht, so muss für jede virtuelle Verrückung die aufgewandte Arbeit gleich Null sein[1].

Bezeichnen wir mit X_i, Y_i, Z_i die Componenten der Kraft P_i nach der Richtung der Coordinatenaxen, so können wir das Princip in die Gleichung zusammenfassen

$$\Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \tag{4}$$

Ueber die Gleichung (4) ist dasselbe zu sagen, wie über die Gleichungen (1). Die Kraftcomponenten X_i, Y_i, Z_i sind für eine bestimmte Gleichgewichtslage als bestimmte gegebene Grössen aufzufassen, und in dieser Weise wird auch in den einfachsten Fällen, z. B. beim Hebelgesetz, oder beim Satz vom Parallelogramm der Kräfte, diese Gleichung angewandt. In anderen An-

[1] Werden auch nicht umkehrbare Bedingungen zugelassen, so muss für jedes System virtueller Verrückungen die aufgewendete Arbeit Null oder positiv sein.

wendungen aber sind die X_i, Y_i, Z_i als von der Lage der Systempunkte abhängig anzusehen, d. h. es sind die X_i, Y_i, Z_i Functionen der Coordinaten der Punkte $m_1, m_2, m_3, \ldots$

Von besonderer Wichtigkeit ist dann wieder der Fall, dass die linke Seite von (4) ein vollständiges Differential ist, d. h. dass eine Function der Coordinaten existirt, deren partielle Ableitungen die X_i, Y_i, Z_i sind. Wir bezeichnen diese Function mit U, und setzen

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Dann wird

$$\Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \delta U,$$

und die Gleichung (4) lautet:

$$(5) \qquad \delta U = 0.$$

Die Function U wird die Kräftefunction genannt.

§. 119.

Das d'Alembert'sche Princip.

Eine Kraft P, die auf einen freien materiellen Punkt wirkt, ertheilt diesem Punkte eine Beschleunigung in ihrer Richtung, die der Kraft direct, und einem dem materiellen Punkte eigenthümlichen Factor, der seine Masse heisst, umgekehrt proportional ist. Wenn also x, y, z die Coordinaten des Punktes mit der Masse m und t die Zeit bedeutet, so ist

$$(1) \qquad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z.$$

Indem man einen noch beizufügenden constanten Factor $= 1$ setzt, verfügt man über die Einheit der Kraft (oder der Masse). Es ist dann eine Kraft $= 1$ gesetzt, wenn sie der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung ertheilt. Wenn das Centimeter, die Secunde und das Gramm als Einheiten für Länge, Zeit und Massen genommen sind (im cm.-gr.-sec.-System), heisst die Krafteinheit eine Dyne.

Man kann den Formeln (1) den Ausdruck geben:

Wenn man zu der vorhandenen Kraft P eine Kraft hinzufügt, die dem Producte der Masse und der Beschleunigung gleich

ist und die der Beschleunigung entgegengesetzte Richtung hat, so entsteht eine Kraft (hier die Kraft 0), die der Bedingung des Gleichgewichts genügt.

Dieser Satz ist von d'Alembert so verallgemeinert worden, dass daraus die Gleichungen für die Bewegung eines beliebigen Systems materieller Punkte unter dem Einflusse beliebiger Kräfte und beliebiger Bedingungen abgeleitet werden können. Das d'Alembert'sche Princip lässt sich so formuliren:

> Fügt man zu der auf den Massenpunkt m_i wirkenden Kraft P_i eine Kraft hinzu, die dem Product aus der Masse und der Beschleunigung gleich und der Beschleunigung entgegengesetzt gerichtet ist, und nennt die Resultante aus diesen beiden Kräften die **verlorene Kraft,** so müssen sich die verlorenen Kräfte unter dem Einflusse der Bedingungen des Systems **in jedem Augenblicke** das Gleichgewicht halten.

In Verbindung mit dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten kann man also die Bedingungen für die Bewegung eines Systems in der mathematischen Formel zusammenfassen

$$(2) \qquad 0 = \sum \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \delta z_i \right],$$

worin δx_i, δy_i, δz_i die Componenten einer virtuellen Verschiebung sind. Es ist dabei aber zu betonen, dass der Sinn dieses Ausdrucks hier der ist, dass die Verschiebungen in dem bestimmten Augenblicke t möglich sein müssen, ein Umstand, der besonders zu beachten ist, wenn die Bedingungen mit der Zeit veränderlich sind.

§. 120.

Der Satz von der Erhaltung der Energie.

Wenn ein materielles System in Bewegung ist, so werden die Verschiebungen, die seine Punkte in dem Zeitelement dt erleiden, in dem vorhin festgesetzten Sinne im Allgemeinen nur dann virtuell sein, wenn die Bedingungen des Systems mit der

Zeit unveränderlich sind. Wenn wir jetzt diesen Fall annehmen, und wenn wir die Componenten der wirklich eintretenden Verschiebung des Punktes m_i mit dx_i, dy_i, dz_i bezeichnen, so können wir aus der Formel (2) des vorigen Paragraphen als speciellen Fall die folgende ableiten:

$$(1)\qquad 0 = \sum \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2}\right) d x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2}\right) d y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2}\right) d z_i\right].$$

Nun ist aber

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}\, d x_i = \frac{1}{2}\, \frac{d\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2}{d t}\, d t \text{ etc.,}$$

und wenn wir daher

$$(2)\qquad T = \frac{1}{2} \sum m_i \left[\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z_i}{d t}\right)^2\right]$$

setzen, so erhält (1) die Gestalt

$$(3)\qquad \sum (X_i d x_i + Y_i d y_i + Z_i d z_i) = \frac{d T}{d t}\, d t = d T.$$

Nun ist

$$v_i = \sqrt{\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y_i}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d z_i}{d t}\right)^2}$$

die Geschwindigkeit des Punktes m_i, und mithin ist nach (2)

$$(4)\qquad T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$$

die halbe Summe der Producte aus der Masse mit dem Quadrat der Geschwindigkeit jedes einzelnen Punktes. Diese Summe T heisst die **lebendige Kraft** oder auch die **kinetische Energie** des Systems.

Die auf der linken Seite von (3) vorkommende Summe

$$d A = - \sum (X_i d x_i + Y_i d y_i + Z_i d z_i)$$

ist die im Zeitelement dt **gegen die Kräfte** des Systems bei der **Bewegung geleistete Arbeit**, und wir können also der Formel (3) den Ausdruck geben:

> Die im Zeitelement gegen die Kräfte des Systems geleistete Arbeit ist gleich dem Verlust $- d T$ an kinetischer Energie,

oder:

> Die Arbeit der Kräfte des Systems im Zeitelemente ist die Vermehrung der kinetischen Energie um dT.

Der Verlust kann hier natürlich auch negativ sein, was einen Gewinn an kinetischer Energie bedeuten würde.

Von besonderer Bedeutung wird dieser Satz aber erst dann, wenn die Kräfte des Systems eine Kräftefunction haben, die von der Zeit unabhängig ist. Wenn nämlich U eine von den Coordinaten, aber nicht explicite von der Zeit abhängige Function ist, und

(4) $$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so ist

(5) $$dU = \Sigma (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

und es kann (3) in die Form gesetzt werden

(6) $$\frac{d(T - U)}{dt} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich integriren und liefert ein allgemeines Integral für das System:

(7) $$T - U = \text{const.}$$

Diese Formel wird der Satz von der lebendigen Kraft genannt.

Wenn das System aus einer Lage 1 in eine Lage 2 übergeht, so ist dazu ein gewisser (positiver oder negativer) Arbeitsaufwand erforderlich, der sich nach (5) gleich

$$U_1 - U_2$$

ergiebt, also gleich dem Ueberschusse des Werthes der Kräftefunction für die erste Lage über den für die zweite, und dieser Arbeitsaufwand ist also nur abhängig von den beiden Lagen des Systems, nicht von dem Wege, auf dem der Uebergang erfolgt. Bei der thatsächlich eintretenden Bewegung wird er auf Kosten der kinetischen Energie bestritten. Danach führt man einen neuen Begriff in die Mechanik ein, die potentielle Energie P, die man durch die Gleichung definirt

(8) $$P = -U + C,$$

worin C eine willkürliche Constante ist, die man im Allgemeinen nicht näher bestimmt, und die Zunahme der potentiellen Energie ist gleich der Arbeit, die zur Ueberführung

des Systems aus der einen Lage in die andere erforderlich ist. Dann lautet die Formel (7)

$$T + P = \text{const.} \tag{9}$$

und sie besagt, dass bei der Bewegung des Systems die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie, also die Gesammtenergie unveränderlich ist.

Bei der Bewegung wird also keine Energie verloren oder gewonnen, sondern es wird nur potentielle Energie in kinetische umgesetzt, oder umgekehrt.

Dies ist der Satz von der Erhaltung der Energie.

Wenn wir z. B. einen schweren Körper in der Nähe der Erdoberfläche betrachten, so ist die potentielle Energie proportional mit der Höhe des Körpers über einem beliebigen festen Horizont, und dieser Fall kann als typisches Beispiel für alle übrigen gelten. Je grösser die potentielle Energie ist, um so grösser ist die Arbeit, die der Körper beim Fallen zu leisten im Stande ist, und die beim freien Falle in einer Vermehrung der kinetischen Energie besteht.

Dieser Satz von der Erhaltung der Energie gilt heut zu Tage als das allererste Gesetz der mechanischen Naturerklärung, dem sich alles unterordnen muss.

Natürlich gilt er nicht für jedes beliebige Theilsystem, wohl aber muss er gelten für ein vollständiges System, d. h. für ein System, das wir nicht als Theil eines grösseren Ganzen zu betrachten haben, dessen Bewegung also von ausser ihm liegenden Massen nicht beeinflusst wird. Für ein vollständiges System machen wir also immer die Annahme,

1. dass die Bedingungen nicht von der Zeit abhängig sind,
2. dass eine von der Zeit unabhängige Kräftefunction existirt.

Wir machen weiter die Annahme, dass der Satz, den wir hier unter der Voraussetzung einer endlichen Anzahl discreter Massenpunkte abgeleitet haben, auch noch Gültigkeit behalte für Systeme, die aus unendlich vielen Massenpunkten bestehen insbesondere also auch für continuirlich vertheilte Massen[1].

[1]) Bemerkenswerth ist der Versuch von Hertz, den Kraftbegriff und damit den Begriff der potentiellen Energie ganz aus der Mechanik zu ver-

§. 121.

Stabilität des Geichgewichtes.

Wir haben für den Fall, dass eine Kräftefunction existirt in §. 118 die Bedingung des Gleichgewichtes in der Form erhalten, dass die erste Variation δU der Kräftefunction oder auch die erste Variation δP der potentiellen Energie für jede virtuelle Verschiebung verschwinden muss. Aus der Differentialrechnung ist bekannt, dass das Verschwinden der ersten Variation δU die Bedingung für ein Maximum oder ein Minimum der Function U ist, und hierdurch werden wir auf die Beziehung der statischen Probleme zu der Theorie der Maxima und Minima hingewiesen.

Wenn ein im Gleichgewicht ruhendes System durch kleine Störungen aus seiner Lage gebracht wird, wobei die einzelnen Punkte auch noch kleine Anfangsgeschwindigkeiten erhalten können, so wird das System in Bewegung gerathen und die Bewegung wird sich nach dem d'Alembert'schen Princip bestimmen.

Das Gleichgewicht heisst stabil, wenn diese Bewegungen im weiteren Verlaufe in beliebig engen Grenzen eingeschlossen bleiben, wenn man nur die anfänglichen Störungen hinlänglich klein, sonst aber beliebig annimmt.

Hier gilt nun unter der Voraussetzung, dass der Satz von der Erhaltung der Energie gilt, der folgende Satz[1]):

> Ein Gleichgewicht ist stabil, wenn die Lage des Systems derart ist, dass die potentielle Energie ein Minimum ist.

Beim Beweise dieses Satzes nehmen wir an, dass die Lage des Systems durch eine endliche Anzahl von einander unabhängiger Parameter (Coordinaten) $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bestimmt sei.

---

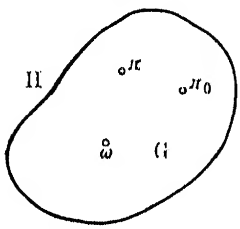
bannen und alles auf die Wirkung von Verbindungen unter den Massen zurückzuführen. An Stelle der potentiellen Energie tritt dann kinetische Energie verborgener Massen, und das Energiegesetz behauptet die Constanz der gesammten kinetischen Energie, also der lebendigen Kraft. (Die Principien der Mechanik von Heinrich Hertz, Leipzig 1894.)

[1]) Zuerst von Dirichlet bewiesen. Werke, Bd. 2, S. 1.

Die rechtwinkligen Coordinaten x_i, y_i, z_i der einzelnen Massenpunkte m_i sind dann Functionen dieser Parameter q, die so bestimmt sein müssen, dass alle Bedingungsgleichungen zwischen den Coordinaten der m_i identisch befriedigt sind. Es ist zur Vereinfachung des Ausdruckes sehr vortheilhaft, diese Parameter q_i als Coordinaten eines Punktes in einem mehrdimensionalen Raum R aufzufassen. Dann entspricht jeder Lage des Systems ein Punkt π des Raumes R, und die Bewegung des Systems wird abgebildet durch die Bewegung eines Punktes im Raume R. Die potentielle Energie P unseres Systems ist dann eine Ortsfunction im Raume R und unser Satz behauptet, dass ein Punkt in R, in dem P ein Minimum ist, einer Lage stabilen Gleichgewichts entspricht.

Die in zwei Dimensionen gezeichnete Fig. 49, die man sich im Raume R zu denken hat, hat natürlich nur den Zweck, die gebrauchten Ausdrücke unmittelbar verständlich zu machen. Für den einfachsten Fall, den eines einzelnen Punktes auf einer gegebenen Oberfläche, entspricht sie übrigens dem wahren Sachverhalt.

Fig. 49.



Es sei also ω ein Punkt, in dem die Function P einen Minimalwerth hat, und da wir bei P eine willkürliche Constante hinzufügen können, so wollen wir diesen Minimalwerth der Einfachheit halber gleich Null annehmen. Dann können wir um den Punkt ω herum ein Gebiet G durch eine $(n-1)$-dimensionale Hülle H abgrenzen, so dass innerhalb G die Function ausser im Punkte ω nur positive Werthe erhält, und es lässt sich eine positive untere Grenze g finden, so dass auf der ganzen Hülle H

$$P > g$$

ist. Nun ertheilen wir dem das System darstellenden Punkte π eine Verschiebung von ω nach π_0 und ertheilen dem System gleichzeitig eine gewisse lebendige Kraft T_0, so dass die weitere Bewegung nach der Gleichung

(1) $$T + P = T_0 + P_0$$

geschieht. Wir können aber jetzt, indem wir den Punkt π_0 nahe genug an ω und T_0 hinlänglich klein annehmen, immer

(2) $$T_0 + P_0 < g$$

machen, und dann folgt aus (1), da P und T nicht negativ sind:

$$P < g, \tag{3}$$

$$T < g. \tag{4}$$

Die Ungleichung (3) lehrt uns, dass der Punkt π im Verlaufe der Bewegung die Hülle H niemals erreichen, noch weniger also überschreiten kann, und aus (4) folgt, dass auch die Geschwindigkeiten immer unter einer beliebig eng zu wählenden Grenze bleiben. Hiermit aber ist die Stabilität des Gleichgewichtes nachgewiesen.

Zu diesen Betrachtungen wollen wir noch eine wichtige Bemerkung hinzufügen.

Es ist weder im vorigen Paragraphen, der von dem Satze der Erhaltung der Energie handelt, noch in diesem Beweise für die Stabilität des Gleichgewichtes ausgeschlossen, dass die virtuellen Variationen nicht integrirbaren Bedingungen unterworfen sind, auf die wir schon in §. 118 hingewiesen haben. Bei der Frage nach dem Minimum kommen dann auch nur die diesen Bedingungen genügenden Variationen in Betracht.

Nehmen wir z. B. den Fall, dass eine vollkommen glatte, schwere Kugel gezwungen ist, auf einer gewölbten Oberfläche zu bleiben, so sind keine derartigen Bedingungen vorhanden. An der höchsten Stelle der gewölbten Fläche wird die Kugel nicht in stabilem Gleichgewichte sein. Die Sache wird aber sofort anders, wenn wir die Bedingung stellen, dass die Kugel auf der Oberfläche nur rollen, nicht gleiten kann; liegt dann zugleich der Schwerpunkt excentrisch, so kann das Gleichgewicht an der höchsten Stelle der Unterlage sehr wohl stabil sein, wenn zugleich der Schwerpunkt in der Kugel seine tiefste Stelle hat. Ob das Gleichgewicht in diesem Falle stabil oder labil ist, wird von dem Verhältnisse der Excentricität des Schwerpunktes zu der Krümmung der Unterlage abhängen.

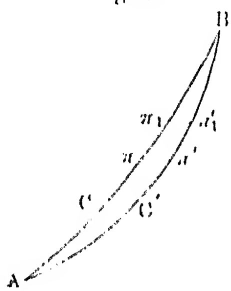
§. 122.

Die Principien der Dynamik.

Wir haben noch zwei andere Formen zu besprechen, in denen man die Grundgesetze der Mechanik darstellen kann, die einfache Folgerungen des d'Alembert'schen Princips sind, und deren

jedes eine neue Eigenschaft der Bewegungsvorgänge ausdrückt. Man erhält sie, wenn man die thatsächlich eintretende Bewegung eines Systems mit einer unendlich wenig davon verschiedenen, einer variirten Bewegung vergleicht. Es ist hierbei wiederum von Vortheil für den Ausdruck, die Lagen des Systems durch die Lage eines Punktes π in dem Raume R zu veranschaulichen, wobei die Bewegung des Systems durch die Bewegung des Punktes π auf einer Curve im Raume R dargestellt wird. Wir wollen annehmen, durch die Curve ACB sei die thatsächlich eintretende Bewegung des Systems aus der Anfangslage A in die Endlage B dargestellt.

Fig. 50.



Wir vergleichen hiermit einen anderen, aber unendlich benachbarten Uebergang aus derselben Anfangslage A in dieselbe Endlage B. Die Punkte dieser variirten Bahn ordnen wir in einer zunächst willkürlichen Weise den Punkten der ursprünglichen Bahn zu, so dass der Punkt π einen bestimmten Punkt π' zum Begleiter hat, wobei jedoch nicht vorausgesetzt werden soll, dass etwa π und π' zur selben Zeit erreicht werden soll.

Es soll in dem Augenblicke t, der der Lage π des Systems entspricht, der Punkt m_i die Coordinaten x_i, y_i, z_i haben. Bei der variirten Bewegung mögen dem Punkte π' die Zeit $t + \delta t$ und die Coordinaten $x_i + \delta x_i, y_i + \delta y_i, z_i + \delta z_i$ des Punktes m_i entsprechen. Den Uebergang von π zu π' bezeichnen wir mit (π, π').

Hier sind also die $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, \delta t$ als willkürliche, aber stetige und unendlich kleine Functionen von t anzusehen. Ist φ irgend eine Function der x_i, y_i, z_i, t, so ist

$$\delta\varphi = \sum^{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\delta x_i + \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\,\delta y_i + \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\,\delta z_i\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\delta t$$

die Variation von φ beim Uebergange (π, π').

Sind t_0 und t_1 die Zeitpunkte, in denen das System bei der wahren Bewegung die Anfangs- und Endlage A und B einnimmt, so nehmen wir an, dass auch die variirte Bewegung von der Lage A zur Zeit t_0 ausgehe, während die Zeit der Endlage B variirt angenommen werden und mit $t_1 + \delta t_1$ bezeichnet sein

soll. Da die Anfangs- und Endlage nicht variirt wird, so sind für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Variationen δx_i, δy_i, $\delta z_i = 0$ zu setzen.

Bedeutet dt die Zeit, die zur Durchlaufung des wahren Bahnelementes (π, π_1) erforderlich ist, und sind dx_i, dy_i, dz_i, $d\varphi$ die entsprechenden Aenderungen der Coordinaten und der Function φ, so ist

$$(1) \qquad d\varphi = \sum^{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} dz_i \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt.$$

Hierdurch ist auch die Bedeutung der Zeichen $d\delta x_i$, $d\delta y_i$, $d\delta z_i$, $d\delta t$ gegeben, und es ist der Werth der Zeit und der Coordinate x_i in dem Punkte π_1', der dem Punkte π_1 ebenso zugeordnet ist, wie der Punkt π' dem Punkte π:

$$(2) \qquad x_i + \delta x_i + dx_i + d\delta x_i, \quad t + \delta t + dt + d\delta t.$$

Die Geschwindigkeitscomponente $u_i = dx_i/dt$ ist aber eine Function des Punktes π und hat in dem Punkte π' einen variirten Werth $u_i + \delta u_i$. Es ist aber nach dem Begriffe der Geschwindigkeit und nach (2)

$$(3) \qquad \delta u_i = \frac{dx_i + d\delta x_i}{dt + d\delta t} - \frac{dx_i}{dt} = \frac{dt\, d\delta x_i - dx_i\, d\delta t}{dt^2},$$

und Entsprechendes gilt für die Variation der beiden anderen Geschwindigkeitscomponenten v_i, w_i [1]). Ist also

---

[1]) Die Bedeutung der Variation δ lässt sich allgemein so definiren: Man betrachte t, x_i, ... längs der Curve A, C, B als Functionen einer unabhängigen Variablen s und bezeichne die Differentialquotienten irgend einer Function φ nach s mit $d\varphi$. Es sei Φ irgend eine Function von der Variablen t, x_i, ..., dt, dx_i, ... (sie könnte auch noch höhere Differentialquotienten enthalten). Es seien nun δt, δx_i, ... willkürliche Functionen von s, und ε eine unbestimmte Constante. Man ersetze in Φ die Functionen

	t,	x_i,	...
durch	$t + \varepsilon\delta t$,	$x_i + \varepsilon\delta x_i$,	...

also auch dt durch $d(t + \varepsilon\delta t) = dt + \varepsilon d\delta t$, dx_i durch $d(x_i + \varepsilon\delta x_i) = dx_i + \varepsilon d\delta x_i$, wodurch Φ in Φ' übergehen möge, und verstehe unter $\delta\Phi$ den Coëfficienten der ersten Potenz von ε in der Entwickelung von Φ' nach steigenden Potenzen von ε. Aus dieser Definition ergiebt sich z. B.

$$d\delta t = \delta dt, \quad d\delta x_i = \delta dx_i, \quad \ldots$$

[Vgl. Lagrange (1762) (Ostwald's Classiker, Nr. 47); Gauss, Principia generalia ect. Werke, Bd. V., S. 59 f.]

(4) $$T = \frac{1}{2} \sum m_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2)$$

die lebendige Kraft, so ergiebt sich aus (3)

(5) $$\delta T = \sum m_i \left(\frac{d x_i}{d t} \frac{d \delta x_i}{d t} + \frac{d y_i}{d t} \frac{d \delta y_i}{d t} + \frac{d z_i}{d t} \frac{d \delta z_i}{d t}\right) - 2 T \frac{d \delta t}{d t},$$

und mit Benutzung der Relationen:

$$\frac{d x_i}{d t} \frac{d \delta x_i}{d t} = - \frac{d^2 x_i}{d t^2} \delta x_i + \frac{d \frac{d x_i}{d t} \delta x_i}{d t} \text{ etc.}:$$

(6) $$\delta T = - \sum m_i \left(\frac{d^2 x_i}{d t^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{d t^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{d t^2} \delta z_i\right) - 2 T \frac{d \delta t}{d t}$$
$$+ \frac{d}{d t} \sum m_i \left(\frac{d x_i}{d t} \delta x_i + \frac{d y_i}{d t} \delta y_i + \frac{d z_i}{d t} \delta z_i\right).$$

Diesen Ausdruck multipliciren wir mit dt und integriren zwischen den Grenzen t_0, t_1. Da wir $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ an beiden Grenzen $= 0$ angenommen haben, fällt nach der Integration das dritte Glied, in dem sich die Integration ausführen lässt, heraus, und es ergiebt sich

(7) $$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum m \left(\frac{d^2 x_i}{d t^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{d t^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{d t^2} \delta z_i\right) dt$$
$$- 2 \int_{t_0}^{t_1} T \frac{d \delta t}{d t} dt.$$

Es bedeute

(8) $$\delta A = - \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

die Arbeit, die durch die Verschiebung (π, π') gegen die Kräfte des Systems geleistet wird. Diesen Ausdruck multipliciren wir wieder mit dt und integriren zwischen denselben Grenzen. Dann ergiebt sich durch Verbindung mit (6)

(9) $$\int_{t_0}^{t_1} \left(2 T \frac{d \delta t}{d t} + \delta T - \delta A\right) dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\left(X_i - m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2}\right) \delta x_i + \left(Y_i - m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2}\right) \delta y_i + \left(Z_i - m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2}\right) \delta z_i\right] dt.$$

Wenn wir nun aber annehmen, die Verschiebung (π, π') sei eine **virtuelle**, so verschwindet nach dem **d'Alembert'schen** Principe das zweite Integral vollständig, und es ergiebt sich

als Bedingung für die thatsächlich eintretende Bewegung.

Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass die Verschiebung (π, π') in dem Augenblicke t eine virtuelle sein muss. Daraus folgt nicht, dass die variirte Bahn $A\,C'\,B$ mit den Bedingungen der Aufgabe verträglich sein muss, da ja der Punkt π' auf dieser zu einer anderen Zeit, nämlich $t + \delta t$, erreicht wird. Es würde nur dann die variirte Bahn nothwendig mit den Bedingungen des Systems verträglich sein, wenn diese Bedingungen von der Zeit unabhängig sind und keine Differentiale enthalten [1]).

Zur Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung giebt nun die Formel (9) mehr als nöthig ist. Es genügt, wenn wir zwischen den Variationen des Ortes und der Zeit noch eine Relation willkürlich annehmen, und je nachdem man diese Relation so oder anders wählt, erhält man verschiedene Formen des Princips der Dynamik. Zwei dieser Formen sind es, die in der Mechanik besonders benutzt werden.

§. 123.

Das Hamilton'sche Princip und die zweite Lagrange'sche Form der Differentialgleichungen der Dynamik.

Die erste Specialisirung der Formel (9) in §. 122 besteht darin dass man $\delta t = 0$ setzt, also annimmt, dass die Punkte π und π' gleichzeitig durchlaufen werden. Dann ergiebt sich das Hamilton'sche Princip in seiner allgemeinen Gestalt

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta A)\, dt = 0.$$

Hierbei ist weder über die Kräfte noch über die Bedingungen irgend eine Voraussetzung gemacht.

Eine wesentlich einfachere Gestalt nimmt aber die Formel an, wenn wir eine Kräftefunction U oder eine potentielle Energie $P = -U$ voraussetzen. Dann ist $\delta A = \delta P = -\delta U$, und wir können die Formel (1) so schreiben:

[1]) Diesen Punkt hat zuerst Hölder klar gelegt. Götting. Nachr. 1896.

(2) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0.$$

In dieser Form wird das Hamilton'sche Princip gewöhnlich angewandt. Es ist hierbei zwar die Existenz einer Kräftefunction vorausgesetzt. Diese kann aber auch noch von der Zeit abhängen. Ebenso können die Bedingungen von der Zeit abhängen. Bei der Bildung der Variation δ ist die Zeit nicht mit zu variiren.

Wir wollen noch zeigen, wie sich aus diesem Princip die Differentialgleichungen der Bewegung herleiten lassen. Wir nehmen wie früher die Lage des Systems bestimmt an durch eine gewisse Anzahl von einander unabhängiger Variablen $q_1, q_2, \ldots$ und machen weiter die Annahme, die nun freilich eine der Einfachheit halber gemachte beschränkende Voraussetzung ist, dass auch die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \ldots$ von einander unabhängig sind und dass die Function U nur von den q_i und etwa noch von der Zeit, aber nicht von den Ableitungen dq_i/dt abhängt. Zur Vereinfachung setzen wir

(3) $$q_i' = \frac{d q_i}{d t}$$

und denken uns nun also $T + U$ als Function von $q_1, q_2, \ldots, q_1', q_2', \ldots$ dargestellt. Dann ergiebt sich aus (2)

(4) $$\int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' \right) dt = 0.$$

Nun schliesst man wie in §. 122 (3)

$$\delta q_i' = \frac{d \delta q_i}{d t},$$

woraus man die Identität ableitet:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i' = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i + \frac{d \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right)}{d t},$$

also, da die δq_i an den Grenzen des Integrals verschwinden:

$$\int_{t_0}^{t_1} d t \sum \left(\frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} - \frac{d}{d t} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i = 0.$$

Da wir nun die δq_i als von einander unabhängig angenommen haben, so ergiebt sich hieraus das System von Differentialgleichungen:

$$(5) \qquad \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i'},$$

und die Anzahl dieser Gleichungen ist so gross wie die Anzahl der unbekannten Functionen q_i. Es sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung, durch deren Integration, wenn m die Zahl der Variablen q_i ist, $2m$ willkürliche Constanten eingeführt werden. Diese Gleichungen sind unter dem Namen der Lagrange'schen Differentialgleichungen (in der zweiten Form) bekannt.

§. 124.

Die Hamilton'sche Form der dynamischen Differentialgleichungen.

Die Hamilton'sche Form der Differentialgleichungen der Dynamik ist eine Umformung der Lagrange'schen, die darauf beruht, dass man an Stelle der q_i' andere Variablen p_i durch die Gleichung einführt:

$$(1) \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}.$$

Dann kann man mit Hülfe dieser Gleichungen die Function T als Function der $q_1, q_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots$ darstellen, und man erhält so $2m$ unbekannte Functionen von t, für die man aber auch nur $2m$ Differentialgleichungen erster Ordnung findet.

Zu bemerken ist, dass die q_i' nur in T, nicht in U vorkommen, und dass T eine homogene Function zweiten Grades der Variablen q_i' ist. Die Gleichungen (1) geben daher ein System linearer Gleichungen für die q_i', deren Determinante nicht verschwindet, weil T für kein von Null verschiedenes System der Variablen q_i' verschwinden kann.

Nach dem Euler'schen Satze über die homogenen Functionen hat man die Relation

$$(2) \qquad 2T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'} q_i' = \sum p_i q_i'.$$

Wir drücken nun T einmal durch q_i, q_i' und dann durch q_i und p_i aus, und bezeichnen die Differentialquotienten von T

unter der letzten Voraussetzung durch Klammern, man erhält dann durch vollständige Differentiation

$$d\,T = \sum \frac{\partial T}{\partial q_i}\, d\,q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i'}\, d\,q_i'$$

$$= \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) d\,q_i + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) d\,p_i,$$

also

$$(3)\quad 2\,d\,T = \sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right] d\,q_i + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) d\,p_i + \sum p_i\, d\,q_i,$$

und andererseits aus (2)

$$(4)\qquad 2\,d\,T = \Sigma\, q_i\, d\,p_i + \Sigma\, p_i\, d\,q_i',$$

also aus (3) und (4):

$$(5)\quad \sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\right] d\,q_i + \sum \left[\left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) - q_i'\right] d\,p_i = 0,$$

und hieraus, weil hier $d\,q_i$ und $d\,p_i$ willkürliche Differentiale sind:

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q_i'.$$

Dann haben wir nach (6), da U auch von p_i unabhängig ist:

$$(7)\quad \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i}\right), \quad \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial p_i}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right),$$

und wir führen jetzt eine Function H, die Hamilton'sche Function, durch die Definition

$$(8)\qquad T - U = H$$

ein, denken uns aber diese Function nicht durch q_i, q_i', sondern durch q_i, p_i ausgedrückt. Dann können wir bei den partiellen Ableitungen die Klammern wieder weglassen und erhalten aus (6) mit Benutzung von (1) und §. 123 (3) und (5)

$$(9)\qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{d\,q_i}{d\,t}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{d\,p_i}{d\,t},$$

und dies ist die Hamilton'sche oder auch die canonische Form der dynamischen Differentialgleichungen.

Aus (9) ergiebt sich

$$(10)\qquad \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{d\,p_i}{d\,t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{d\,q_i}{d\,t} = 0,$$

und die linke Seite dieser Gleichung ist, wenn H von der Zeit

ängig ist, der Differentialquotient dH/dt. Man erhält also unmittelbar den Satz von der Erhaltung der Energie : Form $H = \text{const.}$

§. 125.

Das Princip der kleinsten Wirkung.

urch eine andere specielle Annahme über die in der allnen Formel §. 122 (9) anzuwendende Variation gelangt man em berühmten **Princip der kleinsten Wirkung** von ertuis, was ebenfalls zur Aufstellung der dynamischen entialgleichungen benutzt werden kann.

[an kann auf der variirten Bahn $AC'B$ (Fig. 50, §. 122) em Punkte π' entsprechende lebendige Kraft beliebig anen, wenn sie nur von der dem Punkte π entsprechenden lich wenig verschieden ist. Dadurch ist die Variation der δt, erst bestimmt, und wird im Allgemeinen nicht mehr Null.

[an wähle nun diese Variation so, dass

$$\delta T = -\delta A$$

d. h. man nehme an, dass die Variation (π, π') so vorumen werde, dass der Verlust an kinetischer Energie gleich eleisteten Arbeit werde, d. h., so wie es der Satz von der tung der Energie verlangt, wenn wir auch hier noch nicht ehmen brauchen, dass bei der wahren Bewegung ACB der von der Erhaltung der Energie bestehe. Wenn man dann liminirt, so kann man die Gleichung (9), §. 122, so darn:

$$2\int_{t_0}^{t_1}(T d\delta t + \delta T dt) = 0,$$

auch

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0.$$

Wenn der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit wenn also eine von der Zeit unabhängige Kräftefunction U rt, so ist, wenn wir mit h die Integrationsconstante benen:

(3) $$T = U + h,$$

und diese Relation muss auch bei der Variation in (2) erhalten bleiben. Bezeichnen wir ferner mit ds_i das Wegelement des Punktes m_i, so ist

(4) $$T = \frac{1}{2} \frac{\Sigma m_i ds_i^2}{dt^2},$$

und wenn wir also T und dt durch (3) und (4) aus (2) eliminiren, so ergiebt sich

(5) $$\delta \int \sqrt{U + h}\, \sqrt{m_i\, ds_i^2} = 0.$$

Das Integral (5) ist nun nicht mehr ein Zeitintegral, sondern über eine Strecke zu nehmen. Man kann etwa einen der Wege s_i als unabhängige Variable auffassen, und so lautet dann das Princip so, dass das Integral

(6) $$\int T dt = \int \sqrt{U + h}\, \sqrt{m_i\, ds_i^2},$$

das man als die Wirkungsgrösse bezeichnet, bei der thatsächlich eintretenden Bewegung aus der Anfangs- in die Endlage so klein als möglich werde. Dieses Minimum findet aber nur so lange wirklich statt, als die beiden Grenzlagen nicht zu weit aus einander gewählt werden[1]).

---

[1]) Vergl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik. Hertz, Mechanik, Art. 615.

DRITTES BUCH.

ELEKTRICITÄT

UND

MAGNETISMUS.

Fünfzehnter Abschnitt.

Elektrostatik.

§. 126.

Vectoren im elektrischen Felde.

Nach den in der neueren Physik zur Herrschaft gekommenen, auf Faraday und Maxwell zurückgehenden Anschauungen werden zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen hauptsächlich Vorgänge und Zustände im Dielektricum, d. h. in den die Leiter der Elektricität umgebenden Nichtleitern herangezogen[1]). Durch die freie Elektricität wird im Dielektricum ein Spannungs- oder Zwangszustand hervorgerufen, durch den in jedem Volumenelement ein gewisser Energievorrath aufgespeichert wird, etwa wie bei einer durch ein Gewicht gespannten Feder.

Zur analytischen Darstellung dieser Verhältnisse denken wir uns den ganzen Raum ausgefüllt mit einem Dielektricum, in dem einzelne beliebig gestaltete Leiter der Elektricität von endlicher Ausdehnung eingebettet sind.

Wir schliessen auch den Fall nicht aus, dass das Dielektricum aus verschiedenartigen Bestandtheilen besteht, wie es z. B. eintritt, wenn in der Luft Nichtleiter der Elektricität aus verschiedenen Substanzen eingelagert sind.

---

[1]) A Treatise on Electricity and Magnetism by James Clerk Maxwell, Oxford 1873; deutsch von Weinstein, Berlin 1883. Aus der deutschen Literatur über diesen Gegenstand erwähnen wir hier die Abhandlung von Hertz, „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik in ruhenden Körpern", Göttinger Nachrichten 1890. Gesammelte Abhandlungen II, S. 208. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität (Leipzig 1890). Boltzmann, Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität und des Lichtes, Leipzig 1891 bis 1893. Helmholtz, Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes, herausgegeben von König und Runge (1897).

Die Leiter der Elektricität sind nach diesen Anschauungen dadurch charakterisirt, dass in ihnen ein Spannungszustand sich nicht halten kann, sondern mit der Zeit zerfällt, und folglich kann im Inneren eines Leiters im Gleichgewichtszustand keine Energie aufgespeichert sein.

Zur Darstellung des elektrischen Zustandes in diesem Felde brauchen wir zwei Vectoren, von denen der eine $\mathfrak{E}$ als Kraft, der andere $\mathfrak{D}$ als eine durch diese Kraft hervorgerufene Verschiebung aufgefasst werden kann. Die Kraft $\mathfrak{E}$ bezieht sich auf die Volumeneinheit, und auf ein Volumenelement $d\tau$ wirkt die Kraft $\mathfrak{E}\,d\tau$.

Die Verschiebung $\mathfrak{D}$ weckt eine der Kraft $\mathfrak{E}$ gleiche und entgegengesetzte Gegenkraft, ähnlich wie die elastische Kraft einer gespannten Feder der spannenden Kraft entgegenwirkt. Die in einem Volumenelement $d\tau$ angehäufte (potentielle) Energie ist die Arbeit der Kraft $\mathfrak{E}\,d\tau$, also das Product aus der Kraft und der nach der Richtung der Kraft geschätzten Verschiebung. Das elektrische Gleichgewicht wird dann eintreten, wenn die Gesammtgrösse dieser Energie ein Minimum ist (§. 121).

Zunächst müssen wir die Voraussetzungen, die zu machen sind, genauer präcisiren:

1. Die Verschiebung $\mathfrak{D}$ ist von der Kraft $\mathfrak{E}$ abhängig. In einem isotropen Dielektricum, d. h. bei einer Substanz, die sich in allen Richtungen gleich verhält, haben beide Vectoren die gleiche Richtung. Wir setzen diesen Fall hier allein voraus, sehen also von krystallinischen Medien ab. Wir nehmen an, was vielleicht nur in erster Annäherung zutrifft, dass die Grösse der Kraft mit der Grösse der Verschiebung proportional ist, und setzen demnach

$$4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}. \tag{1}$$

Der Coëfficient ε heisst die Dielektricitätsconstante. Sie ist in einem homogenen Medium eine wirkliche Constante, um aber auch inhomogene Dielektrica zu berücksichtigen, sehen wir ε im Allgemeinen als eine Function des Ortes an, und schliessen auch den Fall nicht aus, dass ε an Flächen unstetig wird. Dies haben wir dann anzunehmen, wenn zwei verschiedene Dielektrica sich in einer Fläche berühren.

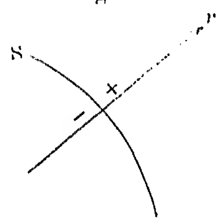
2. Die Grösse

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \quad (\S.\ 87) \tag{2}$$

heisst die räumliche Dichtigkeit der **wahren Elektricität**.

Das Product $\varrho\, d\tau$ ist die im Volumenelement $d\tau$ angehäufte Menge wahrer Elektricität, und ϱ ist eine Function des Ortes, die auch unstetig sein kann und die überall da gleich Null zu setzen ist, wo keine räumliche elektrische Ladung vorhanden ist. Wir können also geradezu die Elektricität als Verdichtung oder Verdünnung einer hypothetischen Substanz, des Aethers, auffassen.

Fig. 51.



3. Der Vector $\mathfrak{D}$ kann an Flächen unstetig sein. Ist S eine solche Unstetigkeitsfläche, und do ein Element dieser Fläche, so ziehen wir in einer beliebigen Richtung eine Normale ν, und unterscheiden beide Seiten von do durch den Index $+$ und $-$, wie die Figur zeigt. Ist dann D_ν nach der Bezeichnung in §. 85 die Componente von $\mathfrak{D}$ in der Richtung ν, so heisst die Differenz

$$D_\nu^+ - D_\nu^- = \sigma \tag{3}$$

die **Flächendichtigkeit der wahren Elektricität**, und $\sigma\, do$ ist die auf dem Flächenelement do angehäufte Menge wahrer Elektricität.

4. Während die Verschiebung $\mathfrak{D}$ von der Grösse D, die wir uns als unendlich klein vorstellen, ausgeführt wird, wächst die Kraft $\mathfrak{E}$ stetig von Null bis zu ihrem vollen Werthe E nach der Formel (1). Bei der Berechnung der Gesammtarbeit ist daher der Mittelwerth $\frac{1}{2} E$ in Rechnung zu ziehen, und es ergiebt sich daraus für das Element $d\tau$ nach eingetretener Verschiebung der Energievorrath

$$dT = \frac{1}{2} E D\, d\tau, \tag{4}$$

und daraus erhält man den Energievorrath des ganzen Systems

(5) $$T = \frac{1}{2}\int E D d\tau.$$

Hier haben $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ gleiche Richtung, und e her, wenn wir die Componenten E_x, E_y, E_z; D. einführen,

$$ED = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z,$$

und folglich

(6) $$T = \frac{1}{2}\int (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z)\, d\tau.$$

Der Gleichgewichtszustand wird dann eintret diese Grösse unter den gegebenen Bedingu klein als möglich wird, oder wenn für jede Variation $\delta\mathfrak{E}$, $\delta\mathfrak{D}$ der Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ (Variation

(7) $$\delta T = 0$$

ist.

5. Wir nehmen an, dass der elektrische Spannung auf ein endliches Gebiet beschränkt sei, dass als endlicher Entfernung ein unelektrischer Zustand Auch nehmen wir die Unstetigkeiten des Feldes endliches Bereich beschränkt an. Dies drückt si folgende Bedingungen aus.

Jenseits einer Kugel R mit hinlänglich grossem sind die Componenten E_x, E_y, E_z überall bestimmte u Functionen des Ortes. Die Gesammtenergie des Feldes wir mit $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel, n Radiusvector bezeichnen, nach (1), (5) und (6) der Aus

(8) $$\frac{1}{8\pi}\int d\omega \int_0^\infty \varepsilon\,(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)\, r^2 d r,$$

und wenn wir einen Punkt auf einem Radiusvector r in liche verschieben, so wird die gegen die Kraft $\mathfrak{E}$ geleiste durch das Integral

(9) $$\int^\infty E_r\, dr$$

ausgedrückt. Wir nehmen an, dass diese Integrale (8 endlich seien. Diese Annahme involvirt die andere, da

(10) $$\lim R E_x = 0, \quad \lim R E_y = 0, \quad \lim R E_z = ($$

wenn R unendlich wird. Die Integrale (8) und (9) sind sicher convergent, wenn sich eine positive Zahl k bestimmen lässt, so dass

$$(11)\qquad R^{1+k}E_x,\quad R^{1+k}E_y,\quad R^{1+k}E_z$$

für $R = \infty$ nicht unendlich werden, also sicher dann, wenn

$$(12)\qquad R^2 E_x,\quad R^2 E_y,\quad R^2 E_z$$

nicht unendlich werden.

Die Voraussetzung, auf die es wesentlich ankommt, ist die Convergenz der Integrale (8) und (9). Diese fordert die Relationen (10) und wird von jeder der Bedingungen (11) und (12) eingeschlossen.

Diese Voraussetzungen sollen uns übrigens nicht abhalten, gelegentlich auch einen ins Unendliche verlaufenden elektrischen Zustand zu betrachten, z. B. einen mit Elektricität geladenen unendlichen Cylinder. Dann erfordern die letzten Bedingungen gewisse Modificationen, auf die wir in den einzelnen Fällen zurückkommen werden.

Nach dieser Voraussetzung betrachten wir es als eine ausreichende Gleichgewichtsbedingung, wenn die Gleichung (7) erfüllt ist für alle zulässigen Variationen $\delta\mathfrak{E}$, $\delta\mathfrak{D}$, die ausserhalb einer ganz beliebigen geschlossenen Fläche verschwinden.

§. 127.

Das elektrostatische Problem.

Um das Problem der Elektrostatik allgemein zu formuliren, nehmen wir ein unendliches Feld an, das aus Leitern und Nichtleitern bestehen mag. Unstetigkeiten des Feldes mögen in beliebigen Flächen vorkommen. Die einzelnen Körper, aus denen das System besteht, betrachten wir als feststehend. In den Nichtleitern, seien es Körper oder Flächen, nehmen wir die wahre Elektricität, wenigstens durch die hier in Betracht kommenden Kräfte, als unbeweglich und unveränderlich, also als eine gegebene Grösse an. In den Leitern, wo die Elektricität vollkommen leicht beweglich ist, ist die wahre Elektricität veränderlich, und nur die in jedem einzelnen, von den übrigen getrennten Leiter vorhandene Gesammtmenge ist als gegeben zu betrachten.

Wir wollen nun nachweisen, dass die Bedingung des Gleichgewichtes $\delta T = 0$ unter folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

I. Im Inneren eines jeden Leiters ist

$$\mathfrak{E} = 0, \qquad \mathfrak{D} = 0. \tag{1}$$

II. $\mathfrak{E}$ ist ein Potentialvector, d. h. es ist überall

$$\mathrm{curl}\, \mathfrak{E} = 0. \tag{2}$$

Wenn man also die Function φ durch

$$\varphi = -\int E_s\, d s \tag{3}$$

definirt, so ist

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{4}$$

Das Integral (3) ist, wenn der Integrationsweg von einem Punkte ausserhalb der Kugel R anhebt (§. 126, 5.), in diesem ganzen Raume ausserhalb eine eindeutige Function des Ortes. Wenn der Integrationsweg ganz im Unendlichen verläuft, so ist das Integral wegen der Voraussetzung [§. 126 (9)] gleich Null, und daraus folgt, dass φ im Unendlichen einen bestimmten Werth hat. Wir können also das Integral (3) auch im Unendlichen anfangen lassen, d. h. wir können φ so definiren, dass es im Unendlichen verschwindet. Dies soll für die Folge geschehen. Setzen wir das Integral (3) in das Innere der Kugel R fort, so ändert sich φ stetig, kann aber möglicher Weise bei verschiedenen Integrationswegen an einem und demselben Punkte verschiedene Werthe erlangen, also an gewissen Sperrflächen unstetig werden (§. 93). Wir nehmen aber an

III. das Potential φ ist im ganzen Felde stetig, im Unendlichen gleich Null und in jedem einzelnen Leiter constant.

IV. Die räumliche Dichtigkeit der wahren Elektricität

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{D} = \mathrm{div}\, \frac{\varepsilon\, \mathfrak{E}}{4\pi} = \varrho \tag{5}$$

ist in jedem Punkte des Dielektricums, also ausserhalb der Leiter gegeben; es genügt daher nach (4) die Function

φ in dem ganzen Raume ausserhalb der Leiter der partiellen Differentialgleichung

(6)
$$\frac{\partial \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\partial z} = -4\pi \varrho,$$

worin ϱ eine gegebene Function des Ortes ist.

V. An jeder mit Elektricität geladenen nichtleitenden Fläche ist

(7)
$$D_\nu^+ - D_\nu^- = \sigma$$

eine gegebene Function des Ortes, was für φ die Bedingung giebt

(8)
$$\varepsilon^+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^+ - \varepsilon^- \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)^- = -4\pi \sigma.$$

VI. Auf den leitenden Flächen ist

(9)
$$D_\nu^+ - D_\nu^- = \sigma$$

nicht gegeben, sondern es ist nur das über die ganze Oberfläche eines jeden einzelnen Leiters erstreckte Integral

(10)
$$\int \sigma \, do = e$$

eine gegebene Grösse.

Ist die Fläche die Grenze eines räumlich ausgedehnten Leiters, so ist, wenn die Normale ν aus dem Leiter in den Nichtleiter hinein positiv gerechnet wird, $D_\nu^- = 0$, also $D_\nu^+ = \sigma$. Es können aber auch leitende Flächen vorkommen, die als unendlich dünne Leiter (Blech) zu betrachten sind; dann gilt die Formel (7).

Es ist nun nachzuweisen, dass unter diesen Voraussetzungen $\delta T = 0$ ist. Nach §. 126 (6) ist aber

(11)
$$T = \frac{1}{2} \int (E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z) \, d\tau.$$

Nach §. 126 (1) ist ferner

$$4\pi \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}, \quad 4\pi \delta \mathfrak{D} = \varepsilon \delta \mathfrak{E},$$

also auch für die x-Componente

$$4\pi D_x = \varepsilon E_x, \quad 4\pi \delta D_x = \varepsilon \delta E_x,$$

und folglich

$$\delta (E_x D_x) = E_x \delta D_x + D_x \delta E_x = 2 E_x \delta D_x.$$

Da Gleiches für die anderen Componenten gilt, so erhält man

$$\delta T = \int (E_x \delta D_x + E_y \delta D_y + E_z \delta D_z)\, d\tau. \tag{12}$$

Nach II. (4) ist aber

$$E_x \delta D_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta D_x = -\frac{\partial \varphi \delta D_x}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \delta D_x}{\partial x}$$

und daher

$$\delta T = -\int \operatorname{div}(\varphi \delta \mathfrak{D})\, d\tau + \int \varphi \operatorname{div} \delta \mathfrak{D}\, d\tau.$$

Wenden wir nun auf den ersten Bestandtheil dieses Ausdruckes den Gauss'schen Integralsatz (§. 89) an, so folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit von φ

$$\delta T = \int \varphi \delta (D_\nu^+ - D_\nu^-)\, do + \int \varphi \operatorname{div} \delta \mathfrak{D}\, d\tau, \tag{13}$$

und wenn also $\delta \varrho$ und $\delta \sigma$ die Variationen der räumlichen und der Flächendichtigkeit sind:

$$\delta T = \int \varphi \delta \sigma\, do + \int \varphi \delta \varrho\, d\tau. \tag{14}$$

Nun ist aber in den Nichtleitern $\delta \varrho$ und $\delta \sigma = 0$. In einem Leiter L ist φ constant, und folglich ist für diesen Leiter

$$\int \varphi \delta \sigma\, do + \int \varphi \delta \varrho\, d\tau = \varphi \left(\int \delta \sigma\, do + \int \delta \varrho\, d\tau \right),$$

und weil die Gesammtmenge der wahren Elektricität auf dem Leiter L gegeben ist, so ist

$$\int \delta \sigma\, do + \int \delta \varrho\, d\tau = 0,$$

auch dann noch, wenn durch die Variation δ Elektricität von der Oberfläche des Leiters in das Innere gedrungen sein sollte. Folglich ist

$$\delta T = 0, \tag{15}$$

wie bewiesen werden sollte.

Die Function φ heisst das elektrische Potential oder auch die elektrische Spannung. Sie hat beim Gleichgewichtszustande in jedem Leiter einen constanten Werth.

§. 128.

Der Energievorrath und die freie Ladung.

Durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie hier zum Beweise der Gleichung $\delta T = 0$ durchgeführt haben, lässt sich auch der in einem elektrostatischen Systeme vorhandene Energievorrath selbst berechnen. Es ist nämlich

$$T = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}D_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}D_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}D_z\right)d\tau$$
$$= -\frac{1}{2}\int \operatorname{div}(\varphi\mathfrak{D})\,d\tau + \frac{1}{2}\int\varphi\operatorname{div}\mathfrak{D}\,d\tau,$$

und wenn man wieder das erste dieser Integrale durch den Gauss'schen Satz umformt

(1) $$T = \frac{1}{2}\int\varphi\sigma\,do + \frac{1}{2}\int\varphi\varrho\,d\tau.$$

Hieraus können wir schliessen, dass es nur eine einzige Function φ geben kann, die den Bedingungen I. bis VI. §. 127 genügt. Denn angenommen, wir hätten zwei solche Functionen φ_1, φ_2, so würde ihre Differenz

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

denselben Bedingungen mit $\varrho = 0$ im ganzen Felde, mit $\sigma = 0$ an den nichtleitenden Flächen, und mit $e = 0$ an den leitenden Flächen genügen. Für dieses φ würde sich daher $T = 0$ ergeben [nach (1)], und dies ist nur möglich, wenn E_x, E_y, E_z verschwinden, also φ constant, und da es nach §. 127, III. im Unendlichen verschwinden soll, gleich Null ist.

Als Corollar aus der hiermit bewiesenen Eindeutigkeit des elektrostatischen Problems ergiebt sich die folgende Anwendung. Nehmen wir die Aufgabe für irgend ein gegebenes System von Leitern und Nichtleitern als gelöst an, und stellen nun in einem der räumlich ausgedehnten Leiter, in dem also φ constant ist, einen Hohlraum her, den wir durch einen Nichtleiter, aber ohne elektrische Ladung, ersetzen, so bleiben auch für dies neue System alle Bedingungen befriedigt, wenn wir der Function φ in diesem Hohlraum denselben constanten Werth lassen, und es ergiebt sich also, dass dieser Hohlraum gar keinen Einfluss auf die

elektrische Vertheilung ausüben kann. Ob also ein Conductor hohl oder mit leitender Masse irgend welcher Art ausgefüllt ist, ist für die elektrische Vertheilung im System gleichgültig.

Wenden wir den Satz §. 99 (8) auf die Function φ an, so ergiebt sich, da φ stetig, also $\eta = 0$ ist,

$$(2)\qquad \varphi = \int \frac{\varrho^* d\tau}{r} + \int \frac{\sigma^* do}{r},$$

worin r die Entfernung der Elemente $d\tau$ und do von dem Punkte, auf den sich φ bezieht, bedeutet, und

$$(3)\qquad \begin{aligned} 4\pi\varrho^* &= -\Delta\varphi = \operatorname{div}\mathfrak{E} \\ 4\pi\sigma^* &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right) = E_\nu^1 - E_\nu. \end{aligned}$$

Nach (2) ist also φ das Newton'sche Potential von Massen, die mit der Dichtigkeit ϱ^* und σ^* in den Elementen $d\tau$ und do lagern. Man nennt diese Grössen die Dichtigkeiten der freien Elektricität im Raumelement $d\tau$ und im Flächenelement do. Zwischen den Dichtigkeiten der freien und der wahren Elektricität besteht nach §. 126 (1), (2), (3) der Zusammenhang

$$(4)\qquad \varrho = \varepsilon\varrho^* + \frac{1}{4\pi}\left(E_x \frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + E_y \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + E_z \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right),$$

und in einem homogenen Medium also

$$(5)\qquad \varrho = \varepsilon\varrho^*.$$

An der Oberfläche eines Leiters ist

$$(6)\qquad \sigma = \varepsilon\sigma^*.$$

Diese Formel aber gilt an einer nicht leitenden Fläche nur, wenn ε zu beiden Seiten denselben Werth hat; sonst kann man setzen:

$$\sigma = \frac{\varepsilon^1 + \varepsilon}{2}\,\sigma^* + \frac{(E_\nu^1 + E_\nu)(\varepsilon^1 - \varepsilon)}{8\pi}.$$

Ist die mit Elektricität beladene Fläche die Grenze zwischen einem Leiter und dem Dielektricum, so ist, wenn der Leiter auf der Seite der negativen ν liegt, $(\partial\varphi/\partial\nu) = 0$, und man erhält

$$4\pi\sigma^* = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^1 = E_\nu^1,$$

und folglich ist auch in diesem Falle

$$\sigma = \varepsilon \sigma^*,$$

worin ε die Dielektricitätsconstante des Dielektricums ist.

Wenn wir in der Folge von der Dichtigkeit der Elektricität schlechtweg reden, so soll darunter die wahre Elektricität verstanden werden[1]).

Bezeichnet man mit R die Entfernung eines variablen Punktes von einem festen Punkte, etwa dem Coordinatenanfangspunkte, so ergiebt sich aus (2) für ein unendlich grosses R

(7) $$\lim R\varphi = \int \varrho^* d\tau + \int \sigma^* do,$$

und die linke Seite dieses Ausdruckes ist die gesammte Menge der im Felde vorhandenen freien Elektricität e^*. Es ist also in grosser Entfernung näherungsweise

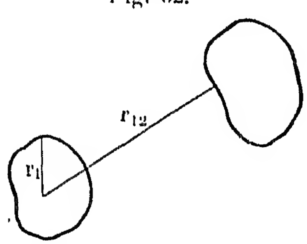
(8) $$\varphi = \frac{e^*}{R}.$$

§. 129.

Das Coulomb'sche Gesetz.

Um von den Ergebnissen der letzten Betrachtungen eine Anwendung zu machen, nehmen wir an, in einem homogenen unelektrischen Dielektricum seien zwei Leiter mit den wahren und freien Ladungen e_1, e_2, e_1^*, e_2^* eingebettet; ϱ und ϱ^* sind $= 0$ zu setzen. Wenn dann φ_1 und φ_2 die constanten Werthe der Function φ in den beiden Leitern sind, so ergiebt sich aus §. 128 (1)

Fig. 52.



(1) $$2T = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2.$$

Bezeichnen wir mit r_1 die Entfernung irgend eines inneren Punktes des ersten Leiters von dem Oberflächenelement do_1 desselben Leiters und mit r_{12} die Entfernung desselben Punktes von dem Oberflächenelement do_2 des zweiten Leiters, so ist nach §. 128 (2)

[1]) Auf die Nothwendigkeit der Unterscheidung zwischen wahrer und freier Elektricität hat Hertz aufmerksam gemacht: „Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper."

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \int \frac{\sigma_2^* d o_2}{r_{12}}, \quad \varphi_{11} = \int \frac{\sigma_1^* d o_1}{r_1},$$

und ebenso ergiebt sich

$$\varphi_2 = \varphi_{22} + \int \frac{\sigma_1^* d o_1}{r_{21}}, \quad \varphi_{22} = \int \frac{\sigma_2^* d o_2}{r_2}.$$

Bedeuten also R_1, R_2 zwei mittlere Werthe von r_{12} und r_{21}, so folgt

$$\varphi_1 = \varphi_{11} + \frac{e_2^*}{R_1}, \quad \varphi_2 = \varphi_{22} + \frac{e_1^*}{R_2}.$$

Wenn nun angenommen wird, dass die Dimensionen der beiden Leiter im Vergleich mit ihren gegenseitigen Entfernungen unendlich klein sind, so können wir $R_1 = R_2 = R$ setzen, und unter R die Entfernung der beiden Leiter verstehen. Dann wird aber nach (1)

$$2T = \varphi_{11} e_1 + \varphi_{22} e_2 + \frac{e_1 e_2^* + e_2 e_1^*}{R},$$

$$(2) \qquad T = \frac{\varphi_{11} e_1 + \varphi_{22} e_2}{2} + \frac{\varepsilon e_1^* e_2^*}{R},$$

$$= \frac{\varphi_{11} e_1 + \varphi_{22} e_2}{2} + \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R},$$

worin ε die Dielektricitätsconstante des Dielektricums ist.

Wenn nun die beiden Leiter um ein unendlich kleines δR von einander entfernt werden, ohne dass die Ladung geändert wird, so bleiben φ_{11}, φ_{22} ungeändert, und es ergiebt sich

$$(3) \qquad \delta T = -\frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2}\, \delta R = -\varepsilon \frac{e_1^* e_2^*}{R^2}\, \delta R,$$

und dies ist die Arbeit, die bei der Verschiebung δR zu leisten ist. Die beiden Leiter üben also eine Kraft auf einander aus, deren Grösse

$$(4) \qquad \frac{e_1 e_2}{\varepsilon R^2} = \frac{\varepsilon e_1^* e_2^*}{R^2}$$

ist, die die Richtung der Verbindungslinie R hat, und die bei gleichem Vorzeichen von e_1, e_2 eine Abstossung ist. Dies ist das Coulomb'sche Gesetz.

Zu demselben Resultat kommt man auch, wenn man die beiden auf einander wirkenden Körper als Nichtleiter annimmt.

Im leeren Raume (und in der Luft nahezu) wird $\varepsilon = 1$ gesetzt. Dann ist nach (4) als Einheit die Elektricitätsmenge angenommen, die in der Einheit der Entfernung im leeren Raume auf die ihr gleiche Menge die Einheit der Kraft ausübt. Dies ist die elektrostatische Einheit der Elektricität.

Um die Dimensionen anzugeben, in denen eine Grösse gemessen wird, bedienen wir uns der üblichen Bezeichnung:

Das Zeichen

$$[A] = [m^{\mu}\, l^{\lambda}\, t^{\tau}]$$

bedeutet, dass eine Grösse A von der Dimension μ in Bezug auf die Masse, λ in Bezug auf die Länge und τ in Bezug auf die Zeit ist. Dabei können die Exponenten μ, λ, τ positiv oder negativ, ganz oder gebrochen oder auch $= 0$ sein. Sind sie alle drei $= 0$, so hat A gar keine Dimensionen, d. h. es ist eine Zahl. Als Einheiten für Länge, Zeit und Masse wendet man in der Physik jetzt gewöhnlich das Centimeter, die Secunde und das Gramm an.

Die Energie T, die durch eine lebendige Kraft gemessen werden kann, hat die Dimension

$$[T] = [m\, l^2\, t^{-2}].$$

Das Volumenelement $d\tau$ hat die Dimension $[l^3]$, und folglich ergiebt die Gleichung §. 126 (4) oder (5)

$$[D\, E] = [m\, l^{-1}\, t^{-2}].$$

Bei der Art der Einführung von $\mathfrak{D}$ könnte man daran denken, D als eine Länge zu definiren. Da aber die Erklärung von $\mathfrak{D}$ als einer Länge doch nur hypothetisch und der directen Beobachtung nicht zugänglich ist, so nehmen wir, wie es üblich ist, ε als reine Zahl an, die für den leeren Raum $= 1$ gesetzt wird. Dann erhalten wir (im elektrostatischen Maasssysteme)

$$[D] = [E] = [m^{1/2}\, l^{-1/2}\, t^{-1}],$$

für das Potential

$$[\varphi] = [m^{1/2}\, l^{1/2}\, t^{-1}],$$

für die Elektricitätsmenge (wahre und freie)

$$[e] = [m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1}].$$

§. 130.

Die Contactelektricität.

Wir haben bisher eine Erscheinung aus dem Gebiete der Elektricität ausser Acht gelassen, die von grosser Wichtigkeit ist, über die wir uns hier noch Rechenschaft geben müssen. Die Erfahrung zeigt, dass durch die blosse Berührung zweier verschiedenartiger Leiter, z. B. Zink und Kupfer, auch ohne Zufuhr von Elektricität in der Umgebung ein Spannungszustand entsteht.

Die Bedingungen für diese Erscheinung ergeben sich aus der Annahme, dass in der Trennungsfläche eine besondere, nur von der Natur der beiden Leiter abhängige Kraft wirkt, so dass zur Durchdringung der Fläche mittelst des Verschiebungsvectors $\mathfrak{D}$ ein besonderer Arbeitsaufwand nöthig ist.

Ist do ein Element der Berührungsfläche O zweier Leiter A, B und n die von A nach B gerichtete Normale auf do, so ist zur Verschiebung δD_n in der Richtung von n ein Arbeitsaufwand von der Grösse $(A, B)\delta D_n do$ erforderlich, wenn (A, B) eine von der Natur der beiden Leiter abhängige Constante ist, die die Spannungsdifferenz oder die elektrische Differenz von A und B heisst.

Man kann also das Flächenelement do als Sitz einer Kraft ansehen, deren Intensität $(A, B)do$ ist, und die, wenn (A, B) positiv ist, von B nach A gerichtet ist, und aus der Bedeutung des Zeichens (A, B) ergiebt sich

$$(A, B) = -(B, A).$$

Der Verschiebung δD_n entspricht also ein Energiezuwachs von der Grösse $(A, B)\delta D_n do$, und der Ausdruck für die Variation der Energie [§. 127 (12)] erhält daher folgende Ergänzung

$$(1) \qquad \delta T = \int (E_x \delta D_x + E_y \delta D_y + E_z \delta D_z)\, d\tau + (A, B) \int \delta D_n do,$$

worin sich die Integration nach do auf die Berührungsfläche von A und B erstreckt.

Wenn nun alle anderen Bedingungen wie in §. 127 bestehen bleiben, nur die Stetigkeit der Function φ an der Fläche O noch dahingestellt bleibt, so ergiebt sich durch Anwendung der Formel §. 127 (13), wenn wir die beiden Seiten der Fläche O als Grenzflächen im Felde ansehen, und mit φ_a und φ_b die Werthe von φ auf beiden Seiten dieser Fläche bezeichnen:

$$(2) \qquad \delta T = \int (\varphi_b - \varphi_a)\, \delta D_n\, d o + (A, B) \int \delta D_n\, d o.$$

Im Zustande des Gleichgewichtes muss dieser Ausdruck für beliebige δD_n verschwinden und daraus ergiebt sich

$$(3) \qquad \varphi_a - \varphi_b = (A, B).$$

Die Function φ muss also beim Uebergange von B nach A eine constante Discontinuität von der Grösse der Spannungsdifferenz (A, B) erleiden. Im Uebrigen bleiben die Bedingungen, die wir in §. 127 aufgestellt haben, ungeändert.

Die Function φ hat also in jedem der beiden Leiter einen constanten Werth, aber diese Constanten sind in den beiden Körpern verschieden.

Ist ein solcher zusammengesetzter Leiter von einem Nichtleiter, etwa von der Luft, umgeben, so hat die Function φ für den Aussenraum der Bedingung zu genügen, dass sie an den freien Oberflächen von A und B je einen constanten Werth erhält. Diese Function, und damit der Spannungszustand, ist also nicht von der Gestalt der Berührungsfläche selbst, sondern nur von der Grenzlinie zwischen beiden Leitern an der Oberfläche abhängig.

Wendet man die Formel §. 99 (8) an, so ergiebt sich, wie in §. 128 (2)

$$(4) \qquad \varphi = \int \frac{\varrho^* d\tau}{r} + \int \frac{\sigma^* d o}{r} + \int \eta^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d o,$$

wenn

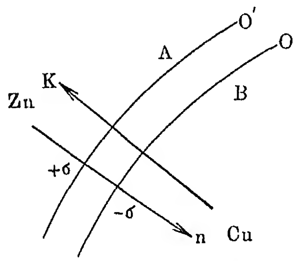
$$(5) \qquad -4\pi\eta^* = \varphi_a - \varphi_b = (A, B)$$

gesetzt wird, und die letzte Integration auf die ganze Berührungsfläche zu erstrecken ist. Daraus ergiebt sich, dass der von der Berührungsfläche herrührende Bestandtheil von φ, nämlich

$$\Phi = \int \eta^* \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} do \tag{6}$$

als das Newton'sche Potential einer über diese Fläche ausgebreiteten elektrischen Doppelschicht von der Flächendichtigkeit η^* angesehen werden kann (§. 100).

Fig. 53.



In der Figur 53 ist A als Zink, B als Kupfer angenommen, wobei $(A, B) > 0$, also die Kraft K vom Kupfer zum Zink gerichtet ist, während die positive Normale vom Zink zum Kupfer geht. In der Doppelschicht ist die positive Dichtigkeit auf der Seite der negativen n, also auf der Zinkseite anzunehmen.

Betrachten wir einen aus mehreren Stoffen, etwa A, B, C, gebildeten Leiter, in dem die Elektricität im Gleichgewicht ist, so hat in jedem Theile dieses Leiters das Potential φ einen constanten Werth. Legen wir in dem Leiter eine in sich zurücklaufende Linie, die der Reihe nach durch die Berührungsflächen von A und B, von B und C und von C und A führt, so hat φ nach einander die sprungweisen Aenderungen (A, B), (B, C), (C, A) erfahren, und da es am Ende wieder zu seinem Ausgangswerthe zurück gelangt sein muss, so folgt die Relation

$$(A, B) + (B, C) + (C, A) = 0, \tag{7}$$

die unter dem Namen des Spannungsgesetzes bekannt ist.

Ist dieses Gesetz nicht erfüllt, so ist zwischen den drei Leitern überhaupt kein elektrisches Gleichgewicht möglich. Man unterscheidet hiernach Leiter erster Classe, die dem Spannungsgesetze gehorchen, zu denen in erster Linie die Metalle gehören, und Leiter zweiter Classe, die, wenn sie mit Leitern erster Classe verbunden sind, diesem Gesetze nicht gehorchen. Diese Körper sind immer chemisch zusammengesetzt, und die Leitung beruht bei ihnen auf einem chemischen Vorgange, wie wir weiterhin noch sehen werden.

In ähnlicher Weise würde das elektrostatische Problem zu formuliren sein, wenn an Stelle der Contactkraft eine stetig durch den Leiter vertheilte gegebene feste elektrische Kraft $\mathfrak{E}'$ thätig

$$\int (E_x \delta D_x + E_y \delta D_y + E_z \delta D_z)\, d\tau$$
$$+ \int (E'_x \delta D_x + E'_y \delta D_y + E'_z \delta D_z)\, d\tau = 0,$$

d diese Bedingung ist befriedigt, wenn

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E'_x,$$
$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -E'_y,$$
$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E'_z,$$

setzt wird. Dies ist aber nur möglich, wenn das Integral $E'_s ds$ über jede im Leiter geschlossene Curve gleich Null ist, nn also der curl von $\mathfrak{E}'$ verschwindet und $\mathfrak{E}'$ ein einwerthiges tential hat. Setzen wir

$$E'_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad E'_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad E'_z = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

müssen wir ψ als eine gegebene Function des Ortes ansehen, d das Potential φ ist für das umgebende Dielektricum durch Bedingung $\Delta \varphi = 0$ und durch die Grenzbedingung bemmt, dass an der Oberfläche $\varphi = \psi +$ const. sein soll. Die nstante, die hierbei auftritt, wird durch die dem Leiter mittheilte Elektricitätsmenge bestimmt.

Sechzehnter Abschnitt.

Probleme der Elektrostatik.

---

§. 131.

Influenz eines elektrischen Punktes.

Wenn in einem elektrostatischen System einer der leitenden Körper unendlich ausgedehnt ist, und im Unendlichen keine freie Elektricität vorhanden ist, so muss in diesem ganzen Leiter das Potential $= 0$ sein. Wir können diese Voraussetzung näherungsweise realisiren, wenn wir in einem endlichen System einen der Leiter durch einen leitenden Draht mit der Erde in Verbindung setzen. Wir können dann, wenn wir den leitenden Draht hinlänglich dünn und das ganze System in genügender Entfernung von der Erdoberfläche annehmen, auch wieder von dem Einfluss dieser beiden absehen, und es ist also eine mit wirklich vorkommenden Verhältnissen vereinbare Voraussetzung, wenn wir annehmen, dass in einem elektrostatischen System das Potential in einem der vorkommenden Leiter auf Null gehalten werde. Ein solcher Leiter mag der Kürze wegen zur Erde abgeleitet heissen. Dieser Leiter mit der Spannung Null ist darum nicht frei von elektrischer Ladung. Die auf ihm angehäufte Elektricität heisst durch Influenz der sonstigen im System vorkommenden Elektricität erregt oder inducirt.

Betrachten wir im leeren Raume oder in der Luft, so dass der Unterschied zwischen wahrer und freier Elektricität verschwindet, einen einzelnen zur Erde abgeleiteten Conductor und einen mit der Elektricitätsmenge -1 geladenen Punkt p, so

genügt das Potential φ dieses Systems in dem Raumtheil τ, der den Punkt p enthält, der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$; es ist an der Oberfläche des Leiters gleich Null, und die Formel §. 128 (2) zeigt, dass φ nichts anderes ist als die Green'sche Function des Raumes τ [1]).

Der elektrische Punkt kann ausserhalb oder, wenn der Conductor hohl gedacht wird, auch innerhalb liegen. Aus der Function φ lässt sich dann die Dichtigkeit σ der Elektricität an der Oberfläche des Leiters nach der Formel §. 127 (8) finden:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -4\pi\sigma, \tag{1}$$

wenn ν die aus dem Leiter in den Raum τ gezogene Normale bedeutet.

Das über die Oberfläche des Leiters genommene Integral $\int \sigma do$ ist die gesammte Elektricitätsmenge, die auf dem Leiter aufgehäuft ist. Diese ist also nach §. 96 (13)

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,do = 1.$$

Daraus folgt, dass eine in einem Punkte concentrirte Elektricitätsmenge in einem zur Erde abgeleiteten Conductor die gleiche und entgegengesetzte Menge aus der Erde aufsaugt.

§. 132.

Elektricitätsvertheilung auf concentrischen Kugelflächen.

Betrachten wir als erstes Beispiel ein System von zwei concentrischen Kugelflächen mit den Radien a, b, auf denen die constanten Potentialwerthe A, B herrschen, so wird φ eine Function des Abstandes r vom Kugelmittelpunkt, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 r\varphi}{dr^2} = 0$$

---

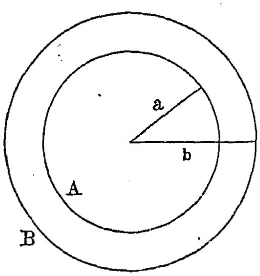
[1]) In dieser Weise ist in der Abhandlung von Green (Crelle's Journ. Bd. 39, auch in Ostwald's Classikern) diese Function zuerst eingeführt.

genügt (§. 106), und die daher den allgemeinen Ausdruck

$$\varphi = m + \frac{n}{r}$$

hat, wenn m und n Constanten sind. Diese Constanten haben verschiedenen Werth in dem schaalenförmigen Raume zwischen den beiden Kugeln, wo das Potential mit φ_1 bezeichnet sei, und in dem äusseren Raume, wo es φ_2 sei.

Fig. 54.



Für φ_1 haben wir die beiden Bedingungen:

$$A = m + \frac{n}{a}, \quad B = m + \frac{n}{b},$$

und für φ_2:

$$m = 0, \qquad n = Bb.$$

Wir erhalten daraus

$$\varphi_1 = \frac{Bb(r-a) + Aa(b-r)}{r(b-a)},$$

$$\varphi_2 = \frac{Bb}{r}.$$

Die Dichtigkeiten σ_1 und σ_2 auf beiden Kugelflächen bestimmen sich aus

$$-4\pi\sigma_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{b(B-A)}{a(b-a)},$$

$$-4\pi\sigma_2 = \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right)_{r=b} = -\frac{a(B-A)}{b(b-a)} - \frac{B}{b}.$$

Die Gesammtmengen e_1, e_2 sind $4\pi\sigma_1 a^2$, $4\pi\sigma_2 b^2$, also

$$e_1 = -\frac{ab(B-A)}{b-a},$$

$$e_2 = \frac{ab(B-A)}{b-a} + Bb.$$

Hieraus sind, wenn e_1 und e_2 gegeben sind, A und B zu bestimmen. Nehmen wir aber an, eine der beiden Kugelflächen, etwa die äussere, sei zur Erde abgeleitet, so ist $B = 0$ zu setzen, und es ergiebt sich

$$e_1 = -e_2 = \frac{abA}{b-a},$$

also, wenn wir $e_1 = -e_2 = m^*$ setzen,

$$\varphi_1 = m^* \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right), \quad \varphi_2 = 0,$$

und hierin bedeutet also m^* die auf der inneren Kugelfläche aufgehäufte Menge freier Elektricität. Ist ε die Dielektricitätsconstante der schaalenförmigen Schicht, so ist $m = \varepsilon m^*$ die wahre Elektricitätsmenge, die auf der inneren Fläche gelagert ist, während auf der äusseren die Menge $- m$ vertheilt ist.

Denken wir uns A auf einer bestimmten Höhe gehalten, etwa indem die innere Kugel mit einer Elektricitätsquelle von constantem Potential in Verbindung gesetzt ist, so wird die aus der Erde aufgesaugte Elektricitätsmenge e_1 um so grösser sein, je kleiner $b - a$, d. h. je dünner die nichtleitende Schicht zwischen beiden Kugeln ist, und wird mit abnehmender Dicke über alle Grenzen wachsen. Dies ist das Princip des Condensators.

§. 133.

Vertheilung der Elektricität auf einem Ellipsoid.

Wenn man die Vertheilung einer einem Leiter mitgetheilten Elektricitätsmenge auf seiner Oberfläche ermitteln will, wenn keine äusseren Einflüsse in Betracht kommen, so hat man eine solche Massenvertheilung auf der Oberfläche aufzusuchen, bei der das Newton'sche Potential im Inneren constant wird.

Diese findet man, wenn man die Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$ für den äusseren Raum unter der Voraussetzung integriren kann, dass ψ an der Oberfläche einen constanten Werth K hat, während die allgemeinen Stetigkeitsbedingungen und die Bedingungen im Unendlichen, denen jedes Potential endlicher Massen genügt, erfüllt sind.

Für eine Ellipsoidfläche mit den Halbaxen a, b, c haben wir schon früher (§. 108) diese Aufgabe gelöst. Es hat sich dort gezeigt, dass eine mit der Flächendichtigkeit

$$(1) \qquad \sigma = \frac{m}{4\pi abc\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}$$

auf der Ellipsoidfläche vertheilte Masse m im Inneren des Ellip-

soides ein constantes Potential hat, und durch die Formel (1) ist also für diesen Fall das elektrostatische Problem gelöst.

Als Grenzfall können wir daraus die Vertheilung der Elektricität auf einer elliptischen Scheibe ableiten, wenn wir c in Null übergehen lassen. Da hierbei gleichzeitig z unendlich klein wird, so müssen wir zunächst z mit Hülfe der Gleichung der Fläche eliminiren. Wir setzen also (1) in die Form:

$$\sigma = \frac{m}{4\pi a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}},$$

und dies giebt für $c = 0$

$$\sigma = \frac{m}{4\pi a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Da nun hier aber auf beiden Seiten der Scheibe die nämliche Massenvertheilung stattfindet, so ist dieser Ausdruck zu verdoppeln, wenn wir unter Dichtigkeit die auf der Flächeneinheit der Scheibe angehäufte Elektricitätsmenge verstehen wollen, und so ergiebt sich für die elliptische Scheibe

(2) $$\sigma = \frac{m}{2\pi \sqrt{a^2 b^2 - b^2 x^2 - a^2 y^2}},$$

und speciell für die Kreisscheibe, wenn wir $a = b$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ setzen,

(3) $$\sigma = \frac{m}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Man sieht, dass am Rande der Scheibe die Dichtigkeit unendlich gross ist, während doch die Gesammtmasse endlich bleibt.

§. 134.

Andere Behandlung der Kreisscheibe.

Das Problem der Vertheilung der statischen Elektricität auf einer ebenen leitenden Fläche lässt sich noch auf eine andere Art angreifen, die wegen des Ausdrucks bemerkenswerth ist, den sie für das Potential liefert.

Legen wir die leitende Fläche S in die xy-Ebene, so wird wegen der Symmetrie die Function φ eine gerade Function von z sein, und es genügt dann, wenn φ für positive Werthe von z bekannt ist. Es muss aber φ für $z = 0$ der Bedingung genügen

(1)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{ausserhalb } S,$$
$$\varphi = \text{const.} \qquad \text{innerhalb } S.$$

Ist φ bekannt, so erhält man für die Dichtigkeit σ der Elektricität auf der Fläche S

(2)
$$2\pi\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

und die Constante der zweiten Gleichung (1) wird aus der Gesammtmenge der der Fläche mitgetheilten Elektricität bestimmt. Ausserdem haben wir noch für φ die partielle Differentialgleichung:

(3)
$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

und im Unendlichen muss φ verschwinden.

Ein particulares Integral von (3), das der letzten Bedingung genügt, ist

(4)
$$\varphi = e^{-\alpha z}\Phi,$$

worin α eine positive Constante und Φ eine Function von x, y allein ist, die der Differentialgleichung

(5)
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \alpha^2 \Phi = 0$$

genügt. Nehmen wir irgend eine Lösung $\Phi(x, y, \alpha)$ der Gleichung (5), die ausser von x, y auch noch von α abhängt, so können wir, wenn wir mit $f(\alpha)$ eine willkürliche Function von α bezeichnen, aus (4) ein allgemeines Integral ableiten

$$\varphi = e^{-\alpha z} f(\alpha)\, \Phi(x, y, \alpha),$$

und wir können auch eine Summe solcher particularen Integrale bilden. Dies führt, wenn wir noch mit einer Constanten $d\alpha$ multipliciren und die Summe für alle zulässigen, d. h. für alle positiven α nehmen, zu dem Ausdruck

(6)
$$\varphi = \int_0^\infty e^{-\alpha z} f(\alpha)\, \Phi(x, y, \alpha)\, d\alpha.$$

Um nun den Bedingungen (1) zu genügen, hätte man die Function $f(\alpha)$ so zu bestimmen, dass

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, \Phi(x, y, \alpha)\, d\alpha = 0 \qquad \text{ausserhalb } S,\\
&\int_0^\infty f(\alpha)\, \Phi(x, y, \alpha)\, d\alpha = \text{const.} \quad \text{innerhalb } S.
\end{aligned}
$$

Im Allgemeinen haben wir zur Lösung dieser Aufgabe kein Hülfsmittel; wohl aber gelingt die Bestimmung von $f(\alpha)$ leicht, wenn S eine Kreisfläche ist.

Wenn wir dann in der xy-Ebene Polarcoordinaten einführen, deren Pol der Mittelpunkt der Kreisfläche S mit dem Radius a ist, indem wir

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta$$

setzen, so wird φ und Φ nur von r abhängig sein, und die Differentialgleichung (5) geht in folgende über (§. 42):

$$
(8)\qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \alpha^2\Phi = 0.
$$

Diese Gleichung hat, von einem constanten Factor abgesehen, nur ein Integral, das für $r = 0$ endlich bleibt, nämlich die Bessel'sche Function $J(\alpha r)$, und wir erhalten also

$$
(9)\qquad \varphi = \int_0^\infty e^{-\alpha z} f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha,
$$

während die Bedingungen (7) ergeben:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad r > a,\\
&\int_0^\infty f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha = \text{const.} \qquad r < a,
\end{aligned}
$$

und nach (2):

$$
(11)\qquad \int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha = 2\pi\sigma \qquad r < a.
$$

Hier geben uns nun die bestimmten Integrale, die wir im achten Abschnitt für die Bessel'sche Function abgeleitet haben, sehr einfach die Bestimmung von $f(\alpha)$.

an wir nämlich

$$f(\alpha) = \frac{m}{a} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}$$

so erhalten wir nach §. 78 (3)

$$\int_0^\infty f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha = \frac{m}{a} \frac{\pi}{2} \qquad r < a,$$

$$= \frac{m}{a} \arcsin \frac{a}{r} \qquad r > a,$$

h §. 77 (6) und (7):

$$\int_0^\infty \alpha f(\alpha)\, J(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad r > a,$$

$$= \frac{m}{a\sqrt{a^2 - r^2}} \qquad r < a;$$

also die Bedingungen (10) erfüllt, und für die Dichtig-
iebt sich aus (11)

$$\sigma = \frac{m}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}.$$

let man das Integral

$$\int \sigma\, do = \frac{m}{2\pi a} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr\, d\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = m,$$

bt sich, dass m die gesammte auf der Fläche vertheilte
itätsmenge ist. Für das Potential φ erhält man aber hier
tive Werthe von z den Ausdruck

$$\varphi = \frac{m}{a} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \frac{\sin \alpha a}{\alpha} J(\alpha r)\, d\alpha.$$

§. 135.

Contactelektricität.

r betrachten noch ein Beispiel für die Bestimmung eines
Contact hervorgerufenen Spannungszustandes.
möge eine Kugel vom Radius c aus zwei Halbkugeln

von verschiedenen Metallen A, B, etwa Zink und Kupfer, zusammengesetzt sein.

Wenn wir unter a und b die constanten Werthe des elektrischen Potentials φ in den beiden metallischen Halbkugeln verstehen, so ist

$$(1) \qquad a - b = (A, B),$$

d. h. gleich der als bekannt vorausgesetzten Spannungsdifferenz der beiden Metalle.

Wenn wir annehmen, dass der Kugel keine Elektricität von aussen mitgetheilt sei, so muss die Vertheilung in Bezug auf die Berührungsebene symmetrisch (mit entgegengesetztem Zeichen) sein, und das Gleiche gilt in Bezug auf die Potentialwerthe.

Es wird also in diesem Falle

$$(2) \qquad a + b = 0, \quad a = -b = \frac{1}{2}(A, B)$$

sein, und wir beschränken die Betrachtungen der Einfachheit halber weiterhin auf diesen Fall. Der allgemeine Fall lässt sich hieraus ableiten, indem man dem gewonnenen Resultat das Potential einer elektrisch geladenen homogenen Kugel hinzufügt.

In unserem Falle ist nun der Werth der Function φ an der Kugeloberfläche, und zwar an der einen Hälfte $= + a$, an der anderen $= - a$ gegeben.

Bezeichnen wir mit Φ eine Function auf der Kugelfläche, die auf der Halbkugel A den Werth $+a$, auf der Halbkugel B den Werth $- a$ hat, so ist nach dem Satze §. 111 (5) das Potential φ in irgend einem äusseren Punkte p

$$(3) \qquad 4\pi c \varphi = \int \Phi \frac{(r^2 - c^2)\, do}{\sqrt{r^2 - 2rc\cos\gamma + c^2}^3}.$$

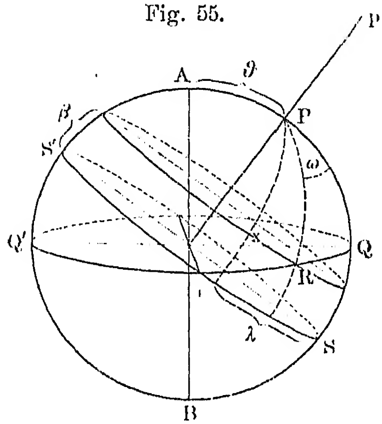
Hierin ist r die Entfernung des Punktes p vom Kugelmittelpunkt, do ein Element der Kugelfläche, und γ der Winkel zwischen r und dem nach do gerichteten Radius.

Wir führen jetzt Polarcoordinaten ein, deren Axe nach dem Punkte p, für den das Potential φ bestimmt werden soll, gerichtet ist.

In der Fig. 55 ist QQ' die Trennungsebene der beiden Metalle, SS' die Aequatorialebene des Coordinatensystems, β die geographische Breite, λ die Länge vom Anfangsmeridian PQS aus gerechnet, also β, λ die geographischen Coordinaten

eines veränderlichen Punktes x. Es sei endlich ϑ die Neigung der Trennungsebene $Q\,Q'$ gegen den Aequator $S\,S'$, die auch gleich dem Winkel $(A\,P)$ ist. Dann ist

Fig. 55.



$$d\,o = c^2 \cos\beta\, d\beta\, d\lambda,$$

(4) $$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

und wir bestimmen zunächst die Function von β:

$$\Theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \Phi\, d\lambda.$$

Es ist aber

$$\alpha)\quad \Theta = a, \qquad \text{wenn } \frac{\pi}{2} > \beta > \vartheta,$$

(5) $$\beta)\quad \Theta = a\,\frac{\pi - 2\omega}{\pi}, \qquad \text{wenn } \vartheta > \beta > -\vartheta,$$

$$\gamma)\quad \Theta = -a, \qquad \text{wenn } -\vartheta > \beta > -\frac{\pi}{2},$$

und hierin ist ω die Länge des Durchschnitts R der Ebene $Q\,Q'$ mit dem Parallelkreise β. Nun haben wir in $P\,Q\,R$ ein bei Q rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in dem die Hypotenuse $P\,R = \frac{1}{2}\pi - \beta$, die anliegende Kathete $P\,Q = \frac{1}{2}\pi - \vartheta$ ist, und es ist also nach einer Grundformel der sphärischen Trigonometrie

(6) $$\cos\omega = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Die Function Θ ist daher in dem Intervall $\frac{1}{2}\pi > \beta > -\frac{1}{2}\pi$ stetig, hat aber einen unstetigen Differentialquotienten, und dieser Differentialquotient ist $= 0$ in den Intervallen (5) α) und (5) γ).

Die Gleichungen (3) und (4) ergeben

$$\frac{2\,\varphi}{c\,(r^2 - c^2)} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \Theta\, \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{r^2 - 2\,r\,c\,\sin\beta + c^2}^{\,3}},$$

und dieses Integral lässt sich nach der Formel

$$\frac{d}{d\beta}\frac{1}{\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}}=\frac{rc\cos\beta}{\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}^3}$$

durch partielle Integration so umformen:

$$\frac{2r\varphi}{r^2-c^2}=\left|\frac{\Theta}{\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$$

$$-\int_{-\vartheta}^{+\vartheta}\frac{d\Theta}{d\beta}\frac{d\beta}{\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}},$$

und nach (5) ergiebt sich hieraus

$$\text{(7)}\qquad \frac{2r(\varphi-a)}{r^2-c^2}=-\int_{-\vartheta}^{+\vartheta}\frac{d\Theta}{d\beta}\frac{d\beta}{\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}}.$$

In dem Integral ist nach (5) β)

$$\Theta=a\,\frac{\pi-2\omega}{\pi},\quad \frac{d\Theta}{d\beta}=-\frac{2a}{\pi}\frac{d\omega}{d\beta}$$

zu setzen, und aus (6) folgt durch leichte Rechnung

$$\frac{d\omega}{d\beta}=-\frac{\cos\vartheta}{\cos\beta\sqrt{\sin^2\vartheta-\sin^2\beta}}.$$

Hiernach ergiebt sich aus (7)

$$\text{(8)}\qquad \frac{r(\varphi-a)}{r^2-c^2}=$$

$$-\frac{a}{\pi}\int_{-\vartheta}^{+\vartheta}\frac{\cos\vartheta\,d\beta}{\cos\beta\sqrt{\sin^2\vartheta-\sin^2\beta}\sqrt{r^2-2rc\sin\beta+c^2}},$$

was ein elliptisches Integral ist. Man kann ihm eine andere Form geben, wenn man die Substitution

$$\sin\beta=\sin\vartheta\sin\nu;\quad \cos\beta\,d\beta=\sin\vartheta\cos\nu\,d\nu$$

macht. Man findet so

$$\text{(9)}\qquad \frac{r(\varphi-a)}{r^2-c^2}=$$

$$-\frac{a}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta\,d\nu}{(1-\sin^2\vartheta\sin^2\nu)\sqrt{r^2+c^2-2rc\sin\vartheta\sin\nu}}.$$

Lassen wir hierin r in c übergehen, so können wir den Grenzwerth des Ausdrucks auf der linken Seite durch Differentiation bestimmen und erhalten die Flächendichtigkeit σ der Elektricität auf der Kugeloberfläche. Es ist nämlich nach §. 127 (8)

$$(10)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=c} = -4\pi\sigma,$$

und danach ergiebt die Formel (9) für $r = c$

$$(11)\quad 2\pi\sigma = \frac{a}{\pi c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\vartheta\, d\nu}{(1-\sin^2\vartheta\,\sin^2\nu)\sqrt{2\,(1-\sin\vartheta\,\sin\nu)}}.$$

Daraus folgt z. B. für den Punkt A, der am weitesten von der Berührungsebene entfernt ist, in dem $\vartheta = 0$ ist:

$$(12)\qquad 2\pi\sigma_0 = \frac{a}{c\sqrt{2}}.$$

Lässt man ϑ in $\frac{\pi}{2}$ übergehen, so wird der Ausdruck (11) für σ unendlich gross, wie man aus einer Umformung des Integrals erkennt, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

Die Ausdrücke für φ und σ, die durch die Formeln (8) bis (11) dargestellt sind, gelten nur für die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Werthe von ϑ. In spiegelbildlich entsprechenden Punkten der anderen Halbkugel haben φ und σ durchweg die entgegengesetzten Werthe.

Dass die durch die Formeln (8) oder (9) bestimmte Function φ, wenn $r > c$ ist, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ stetig in Null übergeht, lässt sich ebenfalls durch eine Umformung der Integrale zeigen. Man ersieht dann daraus, dass φ ausserhalb der Kugel auch beim Durchgang durch die Trennungsebene QQ' mit seinem Differentialquotienten stetig bleibt, was ja übrigens schon aus dem allgemeinen Ausdruck (3), aus dem diese Resultate hergeleitet sind, geschlossen werden kann.

§. 136.

Vertheilung der Elektricität auf Cylinderflächen.

Die Probleme der Vertheilung der statischen Elektricität bieten meist grosse Schwierigkeiten, und manche sehr einfache und gerade für praktische Anwendungen wichtige Fälle sind den Mitteln unserer heutigen Analysis noch völlig unzugänglich. Hierhin gehört z. B. die Vertheilung der Elektricität auf zwei parallelen Kreisscheiben, wie sie bei den Condensatoren verwandt werden. Poisson hat zuerst die Vertheilung der Elektricität auf zwei Kugelflächen bestimmt, und dies Problem ist seitdem noch mehrfach auf anderen Wegen behandelt worden (von Plana, Kirchhoff, C. Neumann, Dirichlet, Riemann). Aber die Dichtigkeit der Elektricität ist schon in diesem Falle eine analytisch keineswegs einfach darzustellende Function des Ortes auf der Kugelfläche. Aehnlich verhält es sich mit der Vertheilung auf einer Ringoberfläche, die von C. Neumann bestimmt ist [1]).

Das Gleichgewicht der Elektricität auf einer Würfelfläche soll (nach einer Mittheilung von Kirchhoff) Dirichlet bestimmt haben. Es ist jedoch über diese Untersuchung nichts erhalten.

Unter diesen Umständen ist es von Interesse, dass das Problem viel leichter zugänglich wird, wenn man sich auf ein zweidimensionales Gebiet beschränkt.

Um diesen Fall genähert zu realisiren, muss man sich ein System unendlich langer cylindrischer Flächen mit parallelen Erzeugenden denken, die so mit Elektricität geladen sind, dass die Dichtigkeit längs jeder Erzeugenden constant ist. Diese Anordnung ist natürlich in der Wirklichkeit unmöglich; sie wird aber eine gute Annäherung an die Wahrheit darstellen, auch wenn die cylindrischen Flächen begrenzt sind, wenn nur die Querdimensionen und gegenseitigen Entfernungen der Flächen klein sind im Vergleich zu der Längenerstreckung der Cylinder, und wenn nur nach dem Zustande in den mittleren Theilen der

---

[1]) Neuerdings hat E. Neumann (Enkel von F. Neumann und Neffe von C. Neumann) das Poisson'sche Problem verallgemeinert, in dem er das elektrostatische Gleichgewicht in gewissen, von drei Kugelflächen begrenzten Räumen bestimmt hat. (Crelle's Journal, Bd. 110.)

Cylinder gefragt wird, so dass der Einfluss der Endflächen vernachlässigt werden kann.

Wir können für diesen Fall aber nicht ohne Weiteres die Formeln anwenden, die wir im vorigen Abschnitte für die Elektrostatik gefunden haben, weil dabei die Function φ unendlich werden würde. Wenn wir aber an Stelle des Potentials die Componenten der elektrischen Kraft betrachten, so können wir den Grenzübergang vornehmen.

Nach §. 127 (4) und §. 128 (2) haben wir, wenn wir wieder die Luft oder den leeren Raum als Dielektricum annehmen, für die Componenten der elektrischen Kraft im Punkte x, y, z bei einem beliebigen Leitersystem, auf dem die Elektricität über die Oberflächen vertheilt ist:

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \frac{\sigma(x-a)\, do}{r^3},\\
E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \int \frac{\sigma(y-b)\, do}{r^3},\\
E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int \frac{\sigma(z-c)\, do}{r^3},
\end{aligned}
$$

und an den leitenden Oberflächen haben wir die Bedingung $\varphi =$ const. oder

$$
(2) \qquad E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz = 0,
$$

wenn σ die Flächendichtigkeit, a, b, c die Coordinaten des Flächenelementes do und in (2) dx, dy, dz die Projectionen eines in der Oberfläche liegenden Linienelementes sind.

Nehmen wir nun eine cylindrische Anordnung an, so legen wir das Coordinatensystem so, dass die z-Axe mit den Erzeugenden der Cylinder parallel ist. Dann ist σ von z unabhängig, und durch die xy-Ebene werden die Cylinder in einer Curve oder einem System von Curven geschnitten, von denen wir ein Bogenelement mit ds bezeichnen. Dann ist

$$
do = ds\, dc,
$$

und wir können in den Formeln (1) nun die Integration nach c zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ ausführen. Es ist aber

$$
\frac{z-c}{r^3} = \frac{\partial}{\partial c}\frac{1}{r},
$$

und folglich, wie zu erwarten,

$$E_z = 0;$$

ferner aber, wenn wir

$$r^2 = (c - z)^2 + \varrho^2,$$
$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = \varrho^2$$

setzen:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial c} \log (c - z + r),$$

und wenn wir dies nach ϱ^2 (nicht nach ϱ) differentiiren:

$$\frac{1}{r^3} = - \frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{r(c - z) + r^2}.$$

Der Bruch

$$\frac{1}{r(c - z) + r^2}$$

ist aber gleich Null für $c = + \infty$ und gleich $2/\varrho^2$ für $c = - \infty$, und daraus ergiebt sich

$$(3) \qquad \begin{aligned} E_x &= 2 \int \frac{\sigma (x - a)\, ds}{\varrho^2}, \\ E_y &= 2 \int \frac{\sigma (y - b)\, ds}{\varrho^2}, \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$(4) \qquad \varphi = - 2 \int \sigma \log \varrho \, ds$$

setzen:

$$(5) \qquad E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Die Gleichung $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ ergiebt hier für die Function φ die Differentialgleichung

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

und aus (2) erhält man für die in der xy-Ebene liegende begrenzende Curve $d\varphi = 0$ oder

$$(7) \qquad \varphi = \text{const.}$$

Für die Flächendichtigkeit erhält man, wenn n die in den Nichtleiter hinein positiv gerechnete Normale bedeutet, aus §. 127 (8)

$$(8) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - 4 \pi \sigma.$$

Um das Verhalten der Function φ im Unendlichen zu be-

stimmen, bezeichnen wir mit R die Entfernung des variablen Punktes p mit den Coordinaten x, y von einem festen Punkte p_0 mit den Coordinaten x_0, y_0, also:

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},$$

und setzen ausserdem

$$m = 2\int \sigma\, d s,$$

so dass m die Gesammtmenge der auf der Höhe 2 der Cylinderflächen angehäuften Elektricitätsmenge, also eine gegebene Constante ist.

Es ist dann nach (4)

$$\varphi + m \log R = -2\int \sigma \log \frac{\varrho}{R}\, d s, \tag{9}$$

und wenn wir mit r den Abstand des Punktes p_0 von dem Elemente ds und mit ϑ den Winkel zwischen r und R bezeichnen, so ist, wie aus dem Dreieck (p_0, p, ds) folgt,

$$\varrho^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta.$$

Wenn wir also

$$\log\frac{\varrho}{R} = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R}\cos\vartheta\right)$$

nach Potenzen von r/R entwickeln, so ergiebt sich aus (9):

$$\varphi + m\log R = C_0 + C_1 R^{-1} + C_2 R^{-2} + \cdots, \tag{10}$$

worin die Grössen $C_0, C_1, C_2, \ldots$ nur noch von der Richtung $(p_0\, p)$, nicht von der absoluten Grösse von R abhängen, also bei unendlich wachsendem R endlich bleiben. Insbesondere ist hier

$$C_0 = 0. \tag{11}$$

Es lässt sich nun folgender Satz beweisen:

> Wenn die Werthe von φ an den Grenzcurven s und die Constante m gegeben sind, so ist durch die Differentialgleichung (6) und durch die Bedingung (10), auch wenn die $C_0, C_1, \ldots$ nicht gegeben sind, die Function φ eindeutig bestimmt.

Denn sind φ und φ' zwei diesen Bedingungen genügende Functionen, so genügt ihre Differenz

$$\Phi = \varphi - \varphi'$$

ebenfalls der Differentialgleichung (6); Φ verschwindet an sämmt-

lichen Grenzcurven s und hat im Unendlichen eine Entwickelung von der Form

$$\Phi = C_0 + C_1 R^{-1} + \cdots,$$

worin C_0 eine Constante und $C_1, \ldots$ im Unendlichen endlich sind.

Wir begrenzen ein Gebiet in der xy-Ebene durch die Curven s und einen Kreis mit dem ins Unendliche wachsenden Radius R. Auf dieses ebene Gebiet und auf den Vector

$$\Phi \operatorname{grad} \Phi,$$

dessen Componenten

$$\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad 0$$

sind, wenden wir den Gauss'schen Integralsatz an und erhalten, wenn df das Flächenelement in der xy-Ebene bedeutet:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right] df = -\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds,$$

worin n die ins Innere des Gebietes gerichtete Normale ist. Das Randintegral über die Linien s verschwindet aber, weil an diesen Linien die Function Φ verschwindet, und an dem unendlich grossen Kreise ist $\partial \Phi / \partial n = C_1 R^{-2}$, $ds = R d\vartheta$, und R fällt mit der negativen n-Richtung zusammen. Demnach ist das über diesen Kreis genommene Integral

$$\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial R} R d\vartheta$$

und verschwindet also mit unendlich wachsendem R. Daraus folgt für das über das unendliche Gebiet S genommene Doppelintegral:

$$\iint \left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2\right\} df = 0.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $\partial \Phi / \partial x$ und $\partial \Phi / \partial y$ überall gleich Null sind. Es ist also Φ eine Constante, die sich aus dem verschwindenden Werthe von Φ an den Grenzlinien gleich Null ergiebt. Aus der Bedingung $C_0 = 0$ erhält man dann noch eine Relation zwischen m und den constanten Werthen von φ an den Grenzlinien s.

Wegen ihrer Analogie mit dem Newton'schen Potential wird eine solche Function φ ein logarithmisches Potential genannt.

§. 137.

Zurückführung des Problems auf eine Abbildungsaufgabe.

Der Nachweis der Eindeutigkeit des Problems, den wir zuletzt geführt haben, gewährt uns den grossen Vortheil, dass wir nicht genöthigt sind, uns über die Strenge eines jeden einzelnen Schrittes genaue Rechenschaft zu geben, dass wir uns durch Vermuthungen leiten lassen können, wenn wir uns nur nachträglich davon überzeugen, dass das gefundene Resultat allen Bedingungen der Aufgabe genügt.

Für die Behandlung der elektrostatischen Probleme im zweidimensionalen Gebiete lässt sich nun, wie aus der Gleichung §. 136 (6) folgt, die Theorie der Functionen complexen Argumentes und besonders die der conformen Abbildung verwenden. Die Gleichung

(1) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

besagt nämlich, dass

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy = d\psi$$

ein vollständiges Differential ist, und wenn wir also

(2) $$\psi = -\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dy\right)$$

setzen, so ist

(3) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

und

(4) $$\chi = \varphi + i\psi$$

ist nach §. 46 eine Function des complexen Argumentes

(5) $$z = x + iy$$ [1]).

Wir haben hier als Grenzcurven in der z-Ebene die Spuren s der leitenden Cylinder zu betrachten; an diesen hat φ constante Werthe, und in dem ganzen Gebiete ausserhalb dieser Curven s, das wir mit S bezeichnen wollen, ist φ eindeutig und stetig,

---

[1]) Hier hat z natürlich eine andere Bedeutung als in §. 136.

wird aber im Unendlichen unendlich, wie der Logarithmus der Entfernung von einem endlichen Punkte. Die Function ψ ist durch das Integral (2) bestimmt, wobei der Integrationsweg irgendwie in dem Gebiete S verlaufen kann. Es wird aber ψ nicht eindeutig sein, sondern in einem und demselben Punkte verschiedene Werthe erhalten, je nach dem Integrationswege. Um sie eindeutig zu machen, müsste man S durch gewisse Schnitte zerlegen, zu deren beiden Seiten ψ verschiedene Werthe hat.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, dass die Begrenzung von S nur aus einer geschlossenen Linie besteht. Wir nehmen in der Ebene einer neuen complexen Variablen

$$w = u + iv \tag{6}$$

einen Kreis K mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt und denken uns auf die Fläche dieses Kreises das Gebiet S in den kleinsten Theilen ähnlich so abgebildet, dass der Nullpunkt in der w-Ebene dem Punkt Unendlich in der z-Ebene entspricht. Durch diese Abbildung ist w als Function des complexen Argumentes z so bestimmt, dass:

1. w in dem ganzen Gebiete S eindeutig, endlich und stetig ist und, abgesehen von der Grenzcurve, einen endlichen von Null verschiedenen Differentialquotienten besitzt;
2. dass der absolute Werth von w an der Curve s gleich 1 wird;
3. dass w für $z = \infty$ verschwindet, und dass die Entwickelung von w nach fallenden Potenzen von z die Form hat:

$$w = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots,$$

worin a_1 von Null verschieden ist (§. 48, 49);
4. für jeden endlichen Werth von z ist w von Null verschieden.

Ist nun diese Function w bekannt, so setzen wir

$$w = e^{\frac{\chi - c}{m}}, \tag{7}$$

worin c und m reelle Constanten bedeuten, und definiren hierdurch die Function χ des complexen Argumentes. Aus (7) folgt

$$\chi = c + m \log w, \tag{8}$$

und daraus der reelle Theil φ von χ

$$\varphi = c + m \log \sqrt{u^2 + v^2}. \tag{9}$$

Nun genügt φ als reeller Theil einer Function des complexen Argumentes z der Differentialgleichung (1). Da der absolute Werth $\sqrt{(u^2 + v^2)}$ von w an der Curve s gleich 1 ist, so erhält an dieser Curve φ den constanten Werth c. Ferner ist wegen 3. zw und also auch das Product der absoluten Werthe $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{u^2 + v^2}$ im Unendlichen endlich, und wenn wir also $\sqrt{x^2 + y^2}$ mit R bezeichnen, so ist

$$\varphi + m \log R \tag{10}$$

im Unendlichen endlich. Da überdies $u^2 + v^2$ nach 4. in keinem endlichen Punkte des Gebietes S verschwindet, so ist φ mit seinen Differentialquotienten im ganzen Gebiete S endlich, stetig und eindeutig, und genügt sonach allen Bedingungen, die wir in §. 136 an die Functionen φ gestellt haben.

Damit ist das elektrostatische Problem auf die Lösung einer Abbildungsaufgabe zurückgeführt.

§. 138.

Die Flächendichtigkeit.

Der Zusammenhang mit der Theorie der Functionen complexen Argumentes giebt uns einen sehr einfachen Ausdruck für

Fig. 56.

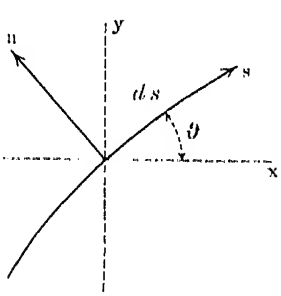
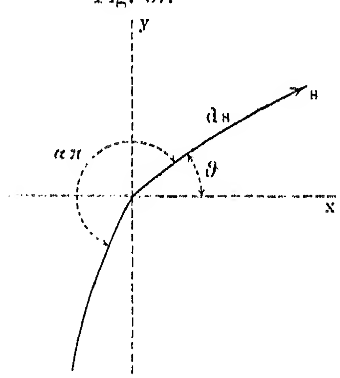


Fig. 57.



die Flächendichtigkeit, die durch die Formel §. 136 (8) allgemein bestimmt ist. Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel, den das Element ds der Grenzlinie s mit der x-Axe einschliesst, und zwar so, dass ds zu der Normalen n so liegt wie die positive x-Axe

zur positiven y-Axe und n von der Leiterfläche in den Nichtleiter hinein positiv gerechnet ist (Fig. 56 a. v. S.), so ist

$$(n, x) = \frac{\pi}{2} + \vartheta, \quad (n, y) = \vartheta, \quad (ds, x) = \vartheta, \quad (ds, y) = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

und es ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \vartheta.$$

Da aber $\partial \varphi / \partial s = 0$ ist, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos \vartheta,$$

und folglich

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial n} e^{i\vartheta},$$

woraus nach §. 136 (8)

$$(1) \qquad 4\pi\sigma = i \chi'(z) e^{i\vartheta}.$$

Betrachten wir einen Punkt, in dem die Curve s eine Ecke mit dem Winkel $\alpha\pi$ (gegen den Nichtleiter) hat (Fig. 57 a. v. S.), und legen der Einfachheit halber den Coordinatenanfangspunkt in diese Ecke, so ist in unendlicher Nähe dieses Punktes (nach §. 48)

$$\chi = \chi_0 + c z^{\frac{1}{\alpha}},$$

und diese Grösse ist in der Strecke ds, wo der reelle Theil von χ constant ist, rein imaginär. Es ist also

$$\chi'(z) = \frac{c}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha} - 1},$$

und wenn wir $z = re^{i\vartheta}$ setzen, so ergiebt sich

$$(2) \qquad 4\pi\sigma = i \frac{c}{\alpha} r^{\frac{1}{\alpha} - 1} e^{\frac{i\vartheta}{\alpha}}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass, wenn $\alpha > 1$ ist, σ für $r = 0$ unendlich wird, während für $\alpha < 1$ und $r = 0$ die Dichtigkeit σ verschwindet.

Wenn also ein Leiter mit einer ausspringenden Kante an das Dielektricum grenzt, so ist die elek-

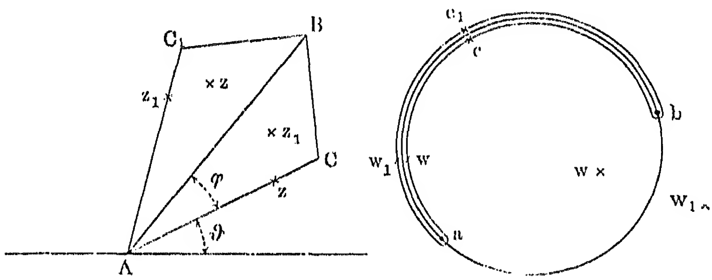
trische Dichtigkeit in der Kante unendlich. Bildet aber der Leiter in der Kante einen einspringenden Winkel gegen das Dielektricum, so ist die Dichtigkeit in der Kante gleich Null.

§. 139.

Elektricitätsvertheilung auf einem Prisma.

Wir wollen nun als Beispiel den Fall betrachten, wo die Curve s in der z-Ebene ein geradliniges Polygon ist. Nach §. 137 kommt die elektrostatische Aufgabe darauf zurück, den Flächenraum ausserhalb dieses Polygons auf das Innere einer

Fig. 58.



Kreisfläche abzubilden, so dass der Mittelpunkt des Kreises dem unendlich fernen Punkte in der z-Ebene entspricht.

In der Fig. 58 ist der Uebersichtlichkeit halber das Polygon als Dreieck (ABC) angenommen. Nehmen wir an, die Aufgabe sei gelöst, es sei also z als Function von w im Innern des Kreises bestimmt, und die Kreisbögen ab, bc, ca mögen den Polygonseiten AB, BC, CA entsprechen.

Wir nehmen nun zu jedem Punkte w im Innern des Kreises den zugehörigen Pol w_1 ausserhalb und lassen diesem den Punkt z_1 entsprechen, der der Spiegelpunkt von z ist in Bezug auf eine der Polygonseiten, etwa AB.

Dann ist die Beziehung von z_1 zu w_1 gleichfalls eine conforme Abbildung (§. 50), und es ist also jetzt z als Function von w in der ganzen w-Ebene bestimmt. Diese Function ist an dem Bogen ba stetig, dagegen an den anderen Theilen des Kreises, an ac und bc, unstetig. Denn die Strecken ac und ac_1 fallen

auf dem Kreise zusammen, während die entsprechenden $A C$, $A C_1$ in der z-Ebene getrennt sind.

Um nun die Unstetigkeit an diesen Linien genauer zu bestimmen, haben wir eine Relation aufzusuchen zwischen zwei entsprechenden Punkten z, z_1 auf den geraden Strecken $A C$, $A C_1$. Diese ergiebt sich folgendermaassen. Wir bezeichnen mit A zugleich den Werth, den die Variable z im Punkte A hat, mit ϑ den Winkel, den $A C$ mit der x-Axe bildet, mit φ den Winkel $B A C$, und mit r den Abstand $A z$, der gleich $A z_1$ ist. Dann haben wir

$$z - A = r e^{\vartheta i}, \qquad z_1 - A = r e^{(2\varphi - \vartheta) i},$$

und folglich

$$z_1 = A + (z' - A') e^{2 \varphi i}. \tag{1}$$

Hierin sind φ und A gegebene Grössen, die sich nicht ändern, wenn sich der Punkt z längs $A C$ bewegt. Wir können daher die Gleichung (1) nach w differentiiren, wenn wir dabei den Punkt w längs der Kreisperipherie fortschreiten lassen, und so ergiebt sich

$$\frac{d}{d w} \log \frac{d z_1}{d w} = \frac{d}{d w'} \log \frac{d z'}{d w'}, \tag{2}$$

d. h., es ist die Function

$$\frac{d}{d w} \log \frac{d z}{d w}$$

beim Uebergange über den Bogen $a c$ in der Ebene w **stetig**. Dieselbe Betrachtung lässt sich aber in Bezug auf die anderen Polygonseiten anwenden, mit geringer Modification auch auf solche, die mit der spiegelnden Seite $A B$ parallel sind, und es folgt also:

Die Function

$$\frac{d}{d w} \log \frac{d z}{d w} = \Phi(w)$$

ist eine in der ganzen Ebene eindeutige und stetige Function von w, die nur in einzelnen, noch näher zu bestimmenden Punkten unendlich werden kann.

§. 140.

Bestimmung der Function $\Phi(w)$.

Es ist nun zunächst erforderlich, die Unstetigkeiten der Function $\Phi(w)$ zu untersuchen. Hierbei sind als singuläre Punkte zu beachten die Bilder der Eckpunkte $A, B, C, \dots$, die Punkte $w = 0$ und $w = \infty$. Die übrigen Punkte bezeichnen wir als reguläre Punkte, und in diesen kann Φ nicht unendlich werden. Denn ist w_0 ein solcher Punkt, und z_0 der zugehörige Werth von z, so haben wir eine in der Umgebung dieses Punktes convergente Entwickelung

$$z - z_0 = c_1(w - w_0) + c_2(w - w_0)^2 + \cdots$$

$$\frac{dz}{dw} = c_1 + 2c_2(w - w_0) + \cdots$$

mit von Null verschiedenem c_1 (vergl. §. 48), und daraus ergiebt sich eine Entwickelung

$$\log\frac{dz}{dw} = c_0 + c_1(w - w_0) + \cdots,$$

worin $c_0 = \log c_1$ endlich ist. Demnach haben wir für einen solchen Punkt eine Entwickelung

(1) $$\Phi = c_1 + 2c_2(w - w_0) + \cdots,$$

also ist Φ endlich im Punkte w_0. Um ferner die Bilder der Eckpunkte des Polygons zu betrachten, bezeichnen wir mit

$$\alpha\pi, \quad \beta\pi, \quad \gamma\pi, \quad \dots$$

die an den Punkten $A, B, C, \dots$ gelegenen Innenwinkel des Polygons (nach der Bezeichnung in der Fig. 58 ist $\alpha\pi = \varphi$), so dass, während in der w-Ebene im positiven Sinne ein Halbkreis um den Punkt a beschrieben wird, der entsprechende Punkt der z-Ebene einen Bogen von der Grösse $(2 - \alpha)\pi$ durchläuft. Dann haben wir nach §. 48 (16) in der Umgebung des Punktes a eine Entwickelung von der Form

$$z - A = (w - a)^{2-\alpha}[c_0 + c_1(w - a) + c_2(w - a)^2 + \cdots],$$

worin c_0 von Null verschieden ist. Daraus folgt

$$\frac{dz}{dw} = (2 - \alpha)\, c_0 (w - a)^{1-\alpha} + (3 - \alpha)\, c_1 (w - a)^{2-\alpha} + \cdots,$$

$$\log \frac{dz}{dw} = (1 - \alpha) \log (w - a) + c' + c'_1 (w - a) + \cdots,$$

und folglich

$$(2) \qquad \Phi = \frac{1 - \alpha}{w - a} + c'_1 + 2 c'_2 (w - a) + \cdots,$$

und Entsprechendes gilt von den übrigen Punkten $B, C, \ldots$

Dem Punkte $w = 0$ entspricht der Werth $z = \infty$, und zwar so, dass einem Kreislaufe um den Nullpunkt ein einfacher Kreislauf in der z-Ebene entspricht. Folglich gilt in der Umgebung des Nullpunktes eine Entwickelung der Form

$$z = \frac{c_{-1}}{w} + c_0 + c_1 w + \cdots,$$

$$\frac{dz}{dw} = -\frac{c_{-1}}{w^2} + c_1 + 2 c_2 w + \cdots$$

mit von Null verschiedenem c_{-1}; daraus

$$\log \frac{dz}{dw} = -2 \log w + c'_0 + c'_1 w + \cdots,$$

$$(3) \qquad \Phi = -\frac{2}{w} + c'_1 + 2 c'_2 w + \cdots \qquad (w = 0).$$

Es bleibt noch der Punkt $w = \infty$ zu betrachten, dem gleichfalls der Werth $z = \infty$ entspricht. Für diesen hat man, da einem einfachen Kreislaufe mit hinlänglich grossem Radius in der w-Ebene ein einfacher Kreislauf in der z-Ebene entspricht:

$$z = c_{-1} w + c_0 + \frac{c_1}{w} + \cdots,$$

$$\frac{dz}{dw} = c_{-1} - \frac{c_1}{w^2} - \frac{2 c_2}{w^3} - \cdots,$$

$$\log \frac{dz}{dw} = c'_0 + \frac{c'_2}{w^2} + \frac{c'_3}{w^3} + \cdots,$$

$$(4) \qquad \Phi = -\frac{2 c'_2}{w^3} - \frac{3 c'_3}{w^4} - \cdots \qquad (w = \infty),$$

d. h., es muss $w^2 \Phi$ im Unendlichen noch verschwinden.

Aus diesen Bedingungen ergiebt sich aber, dass die Differenz

in der ganzen w-Ebene endlich bleibt und im Unendlichen verschwindet, und dass sie also nach dem Satze §. 48, II. identisch Null ist.

Hiernach erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$(5)\quad \frac{d}{dw}\log\frac{dz}{dw} = -\frac{2}{w} + \frac{1-\alpha}{w-a} + \frac{1-\beta}{w-b} + \frac{1-\gamma}{w-c} + \cdots,$$

und aus (4) ergeben sich noch zwei Bedingungen, die besagen, dass bei der Entwickelung der rechten Seite nach fallenden Potenzen von w die Coëfficienten von w^{-1} und w^{-2} ausfallen müssen:

$$(6)\qquad \sum(1-\alpha) = 2, \qquad \sum a(1-\alpha) = 0;$$

von diesen Bedingungen ist die erste von selbst erfüllt, da in einem Polygon von n Seiten die Winkelsumme

$$(7)\qquad \pi\sum\alpha = (n-2)\pi$$

ist. Die zweite zerfällt, da die $a, b, c, \ldots$ complex sind, durch Trennung des reellen und imaginären Theiles in zwei Relationen.

Aus (5) erhält man aber durch Integration, wenn c_1 und c_2 die Integrationsconstanten sind:

$$(8)\quad c_1 z + c_2 = \int\frac{dw}{w^2}(w-a)^{1-\alpha}(w-b)^{1-\beta}(w-c)^{1-\gamma}\ldots$$

Wenn das Polygon in der z-Ebene durch die Coordinaten seiner n Eckpunkte gegeben ist, so hat der Ausdruck (8) $2n$ Bedingungen zu erfüllen. Zu ihrer Befriedigung hat man die n reellen Grössen $\alpha, \beta, \ldots$ die n Grössen $a, b, \ldots$ mit dem absoluten Werthe 1 und die beiden complexen Constanten c_1, c_2, also $2n+4$ reelle Constanten, die aber noch den drei Relationen (6) genügen müssen. Also ist die Anzahl der verfügbaren Constanten um 1 grösser als die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen. Dies ist nothwendig, da man, wenn die Aufgabe auf eine Art gelöst ist, den Kreis in der w-Ebene noch um einen beliebigen Winkel drehen kann.

Durch eine Veränderung des Coordinatensystems in der z-Ebene und durch ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung kann man den Ausdruck (8) auf die Form bringen

$$(9)\qquad z = \int\frac{dw}{w^2}(w-a)^{1-\alpha}(w-b)^{1-\beta}(w-c)^{1-\gamma}\ldots,$$

und in dieser Form giebt er, wenn $a, b, c, \ldots$ irgend welche Grössen mit dem absoluten Werthe 1, und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ irgend Zahlen zwischen 0 und 2 sind, die den Bedingungen (6) genügen, immer die Abbildung des Einheitskreises in der w-Ebene auf ein geradliniges Polygon in der z-Ebene mit den Winkeln $\alpha\pi, \beta\pi; \gamma\pi, \ldots$

Wenn wir für $a, b, c, \ldots$ die vier Punkte $\pm e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$, und $\alpha = \beta = \gamma \ldots = 1/2$ annehmen, so sind die Bedingungen (6) befriedigt, und wir erhalten aus (9)

$$z = \int \sqrt{1 + w^4}\, \frac{dw}{w^2}, \tag{10}$$

also ein elliptisches Integral (zweiter Gattung). Lassen wir w über die Kreisperipherie gehen, so setzen wir $w = e^{i\vartheta}$ und erhalten

$$dz = i\sqrt{2\cos 2\vartheta}\, d\vartheta;$$

es ist also dz reell oder rein imaginär, und wir haben in der z-Ebene ein Quadrat mit der Seitenlänge

$$s = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos 2\vartheta}\, d\vartheta \text{ [1]}.$$

§. 141.

Influenz zweier cylindrischer Leiter.

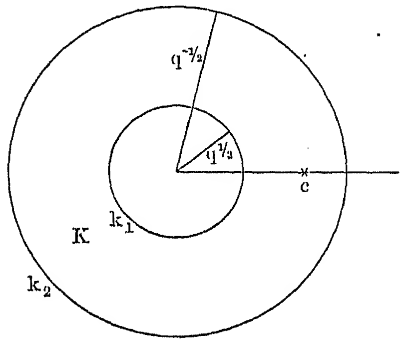
Es seien jetzt zwei parallele cylindrische Leiter von beliebigen Querschnitten gegeben, auf denen die constanten Potentialwerthe C_1, C_2 herrschen sollen. Dann ist das Gebiet S in der z-Ebene von zwei Curven s_1, s_2, den Querschnittlinien der Cylinder, innerlich begrenzt, und erstreckt sich ins Unendliche.

Das Gebiet S ist zweifach zusammenhängend, weil es durch einen die Curven s_1, s_2 verbindenden Schnitt nicht in getrennte

[1]) H. A. Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben", Crelle's Journal, Bd. 70 (1869). E. B. Christoffel: „Sul problema delle temperature stationarie", Annali die Matematica, Ser. 2, T. I (1867), T. IV (1870).

Theile zerfällt. Das elektrische Potential φ ist so zu bestimmen, dass es den allgemeinen Bedingungen des §. 136 genügt und an den Curven s_1, s_2 die Werthe C_1, C_2 annimmt.

Fig. 59.



Im Allgemeinen wird die Function φ im Unendlichen logarithmisch unendlich [§. 136 (10)]. Es kann hier aber auch der Fall vorkommen, dass sie endlich bleibt, nämlich dann, wenn beide Cylinder gleiche und entgegengesetzte Elektricitätsmengen enthalten, also $m = 0$ ist.

Auch dieses Problem lässt sich auf eine Abbildungsaufgabe zurückführen, wie wir jetzt zeigen werden.

I. Wir nehmen an, dass das Gebiet S auf das Innere eines Kreisringes K conform abgebildet sei, so dass die beiden Grenzkreise k_1, k_2 den Curven s_1, s_2 entsprechen.

Die Radien der begrenzenden Kreise wollen wir so wählen, dass ihr Product $= 1$ ist, was offenbar durch proportionale Vergrösserung oder Verkleinerung zu erreichen ist, wenn es nicht schon von vornherein so sein sollte. Wir bezeichnen demnach den Radius des inneren Kreises mit $q^{1/2}$, den des äusseren mit $q^{-1/2}$, so dass q ein positiver echter Bruch ist. Dieser Kreisring liege in der Ebene einer complexen Variablen w.

Da wir den Kreisring noch in seiner Ebene drehen können, so steht es uns frei, dem unendlich fernen Punkt des Gebietes z einen Punkt c auf dem positiven Theil der reellen Axe entsprechen zu lassen. Die Wahl von q und c wird uns aber nicht mehr freistehen, sondern von den Lagenverhältnissen der Curven s_1, s_2 abhängen, wie wir später an Beispielen sehen werden.

Wenn dies Abbildungsproblem gelöst ist, so ist w in dem Gebiete S eine stetige, endliche und von Null verschiedene Function, deren absoluter Werth an den Curven s_1, s_2 die constanten Werthe $q^{1/2}$ und $q^{-1/2}$ annimmt. Wenn wir also

$$(1) \qquad \chi = \varphi + i\psi = \log w, \quad w = e^{\varphi + i\psi}$$

setzen, so ist φ der reelle Theil einer Function χ von z, der an

den Curven s_1, s_2 die constanten Werthe $\frac{1}{2}\log q$, $-\frac{1}{2}\log q$ annimmt, und hierdurch ist also bereits das Problem für den speciellen Fall gelöst, dass φ im Gebiete S endlich bleibt, also die Gesammtmenge der mitgetheilten Elektricität gleich Null ist.

Im Allgemeinen haben wir aber noch eine zweite Aufgabe zu lösen:

II. Es ist eine Function $\chi_1 = \varphi_1 + i\psi_1$ des complexen Argumentes z in dem Gebiete S, also auch des complexen Argumentes w innerhalb des Kreisringes K so zu bestimmen, dass

a) die Function χ_1 in dem Punkte e logarithmisch unendlich wird, so dass

$$\chi_1 - \log(w - e)$$

in e endlich bleibt;

b) der reelle Theil φ_1 von χ_1 in dem Gebiete K, abgesehen von dem Punkte e, endlich, stetig und eindeutig ist und an den Grenzen k_1, k_2 verschwindet.

Der imaginäre Theil ψ_1 wird in Folge der Bedingung a) nicht eindeutig sein können.

Da der Punkt $w = e$ dem Punkte $z = \infty$ entspricht, so besteht eine Entwickelung von der Form

$$w = e + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots,$$

also

$$\log(w - e) = -\log z + \log c_1 + \frac{c_2}{c_1 z} + \cdots,$$

und wenn also der absolute Werth $\sqrt{x^2 + y^2}$ von z mit R bezeichnet wird, so ist nach a)

$$\varphi_1 + \log R \tag{2}$$

im Punkte $z = \infty$ endlich.

Setzen wir daher

$$\Phi = m\varphi_1 + A\varphi + B, \tag{3}$$

so ist, wenn A und B willkürliche Constanten bedeuten, Φ der reelle Theil einer Function complexen Argumentes z, die nach a) und b) die Eigenschaften hat:

1. $\Phi + m \log R$ ist im Unendlichen endlich [§. 137 (10)].
2. An den Grenzcurven s_1, s_2 ist

$$\Phi = C_1 = \frac{1}{2} A \log q + B,$$

$$\Phi = C_2 = -\frac{1}{2} A \log q + B,$$

und die Constanten A und B können so bestimmt werden, dass C_1 und C_2 beliebig gegebene Werthe erhalten.

Damit ist also unser elektrostatisches Problem auf die Lösung der beiden functionentheoretischen Probleme I., II. zurückgeführt. Von diesen ist das zweite von der Natur der Curven s_1, s_2 unabhängig und kann, wie wir sehen werden, allgemein gelöst werden. Das erste aber hängt von der Gestalt dieser Curven ab und kann nur in speciellen Fällen gelöst werden.

Wir wenden uns zunächst der Behandlung des zweiten Problemes zu.

§. 142.

Bestimmung der Function $\chi_1(w)$.

Um die Function χ_1 zu bestimmen, setzen wir

(1) $$\chi_1(w) = \log f(w).$$

Dann ist $f(w)$ eine Function, die in dem Kreisringe K den Bedingungen genügen muss:

a) Die Function $f(w)$ wird in dem Punkte c gleich Null, und zwar so, dass der Quotient $f(w)/(w-c)$ endlich und von Null verschieden bleibt; abgesehen von dem Punkte c ist der absolute Werth von $f(w)$ in dem Gebiete K endlich, stetig, eindeutig und von Null verschieden.

b) Der absolute Werth von $f(w)$ ist an den beiden Peripherien k_1, k_2 gleich 1.

Um eine solche Function $f(w)$ zu finden, construiren wir zu einem beliebigen Punkte w, den wir vorläufig innerhalb K annehmen wollen, die Pole in Bezug auf die beiden Kreise k_1, k_2,

und nehmen zu diesen Punkten die Spiegelbilder in Bezug auf die reelle Axe w_1 und w_{-1}. Es ist dann

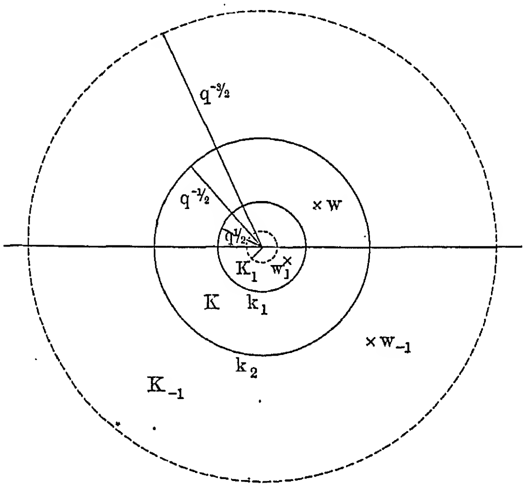
$$w w_1 = q, \quad w w_{-1} = q^{-1}. \tag{2}$$

Hierdurch wird das ganze Gebiet K auf zwei angrenzende Gebiete K_1, K_{-1} conform abgebildet, und die innere Begrenzung von K_1 ist ein Kreis mit dem Radius $q^{3/2}$, die äussere Begrenzung von K_{-1} ein Kreis mit dem Radius $q^{-3/2}$.

Auf dem Kreise k_1 ist w_1 mit w conjugirt imaginär, und ebenso ist w_{-1} auf k_2 mit w conjugirt imaginär.

Die Function $f(w)$ muss nun, wie aus der Symmetrie folgt, eine **reelle Function** sein, d. h. eine Function, die für con-

Fig. 60.



jugirt imaginäre Werthe des Argumentes selbst conjugirte Werthe erhält (und folglich für reelle Argumentwerthe reell wird). Demnach verlangt die Forderung b), dass $f(w)\,f(w_1)$ an k_1, und $f(w)\,f(w_{-1})$ an k_2 gleich 1 wird:

$$f(w)\,f\left(\frac{q}{w}\right) = 1, \qquad \text{an } k_1, \tag{3}$$

$$f(w)\,f\left(\frac{1}{qw}\right) = 1, \qquad \text{an } k_2. \tag{4}$$

Diese Gleichungen müssen aber, da sie an **Linien** erfüllt sein sollen, identisch stattfinden.